Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
januari

Euclides 4

Wolters-Noordhoff

Euclides

Redactie

Drs H. Bakker
G. Bulthuis
W. M. J. M. van Gaans
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
Drs C. G. J. Nagtegaal
Drs A. B. Oosten (eindredacteur)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt
Mw. H. S. Susijn-van Zaale
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 48,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Foutenverbetering op de Compact Disc*

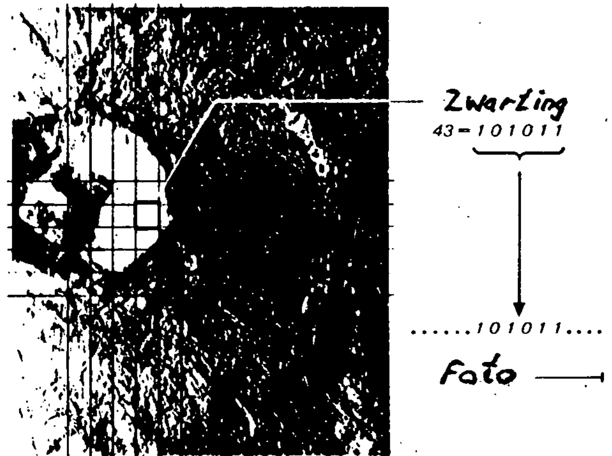
J. H. van Lint

Inleiding

Om in één uur iets te vertellen over *fouten – verbeterende codes* onder de aanname dat het onderwerp geheel nieuw is voor de meeste toehoorders is niet eenvoudig. Veel zal worden uitgelegd via voorbeelden, vaak in combinatie met oversimplificatie t.o.v. wat in de praktijk geschiedt. De situatie die we ons moeten voorstellen is de volgende.
Er wordt *informatie* aangeboden in de vorm van een zeer lange rij bestaande uit twee soorten symbolen, die we 0 en 1 noemen.
(We denken aan de punt en de streep bij Morse, al of niet een rookwolkje bij Indianensignalen, of aan geluid van twee verschillende frequenties. Meer voorbeelden volgen.) Deze informatie zal van een *zender* naar een *ontvanger* worden gebracht via een zgn. *kanaal*. De lezer die hierbij behoefte heeft aan een beeld denke aan een (gestoorde) radiozender. Helaas heeft dit kanaal de hinderlijke eigenschap dat het af en toe een door de zender aangeboden 0 (resp. 1) bij de ontvanger als een 1 (resp. 0) aflevert. We noemen dit 'fouten'. Hierbij onderscheiden we twee mogelijke situaties:

i) het optreden van fouten is een stochastisch proces: met een zekere kans p (zeg $p = 0{,}01$) treedt een fout op ('random errors');
ii) af en toe treden hele series fouten vlak bij elkaar op (dit noemen we 'burst errors').

Voor we verder gaan eerst twee voorbeelden uit de praktijk die tonen hoe zo'n rij nullen en enen kan ontstaan. Beide voorbeelden waren spectaculaire successen.
Bij de satellietfoto's die zijn gemaakt van Mars, Saturnus en Jupiter werd de foto verdeeld in zeer veel kleine vierkantjes (genaamd pixels). Van elk vierkantje wordt de zwartingsgraad bepaald, uitgedrukt in een schaal van (bijvoorbeeld) 0 t/m 63. Deze getallen worden geschreven in het tweetallig stelsel:
$43 = 101011$
$(= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1.1)$.
Zó geeft één foto aanleiding tot een rij van vele miljoenen nullen en enen. Het 'kanaal' was hier de zender in de satelliet, de ruimte en de ontvanger plus versterker op aarde.

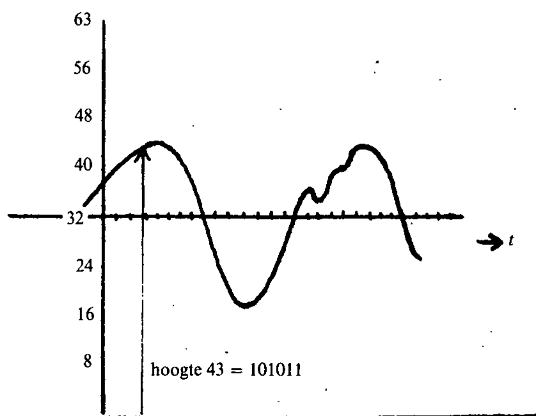


Figuur 1

Het tweede voorbeeld is de *compact disc* (volledig: Compact Disc Audio System). De informatie (muziek) is op de plaat aangebracht als een lange spiraal bestaande uit twee soorten objecten, nl. wél een putje (0,24 μm^2, 0,12μm diep) of niet zo'n putje (= een 'land'). Hierbij kan men een putje een 1 noemen, een land een 0. Een disc bevat ongeveer 5.10^9 bits (een bit is 0 of 1).
Het lezen van de informatie (afspelen van de plaat) geschiedt door een laser (een slechts in 't Nederlands optredende woordspeling!). De diepte van de putjes is zodanig dat door interferentie bij de putjes veel minder licht wordt gereflecteerd dan bij de

* voordracht gehouden op de 12de gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL; 28.3.87

landen en zo meet het apparaat of er wel of niet een putje is. Behalve dat de plaat bij het lezen niet slijt is nog één van de voordelen van het optisch lezen het feit dat de informatie beschermd is door een ongeveer 1 millimeter dikke doorzichtige laag waardoor de laser weinig last heeft van stof op de plaat en kleine oppervlakte-beschadigingen. Desondanks treden er fouten op bij het lezen. Hoe men deze fouten kan opsporen en verbeteren, met als gevolg een prachtige kwaliteit muziek zonder de hinderlijke tikjes die we van beschadigde grammofoonplaten kennen, is het onderwerp van deze voordracht.
Hoe komt de rij nullen en enen tot stand? Men moet zich een continu signaal voorstellen als in figuur 2 (hetgeen bijvoorbeeld de ingangsspanning van een audioversterker voorstelt als functie van de tijd), hier in een schaal 0-63.
Om de τ seconden (in de praktijk is $\tau = 1/44100$, d.w.z. 'sampling frequency' = 44.1 kHz) wordt de sterkte van het signaal gemeten (bij stereo zelfs twee tegelijk) in een schaal die resulteert in een voorstelling met 16 bits. Zo ontstaat ook hier een lange rij nullen en enen. We merken op dat bij het spelen van de plaat meer dan een *miljoen* nullen en enen per seconde worden gelezen. Allerlei toevalligheden, beschadigingen e.d. kunnen wat wij boven een random error noemden veroorzaken terwijl krassen en vlekken aanleiding zijn tot burst errors.
De lezer die meer wil weten over technische aspecten van de CD, foutenverbetering enz. verwijzen we naar [1], [2].

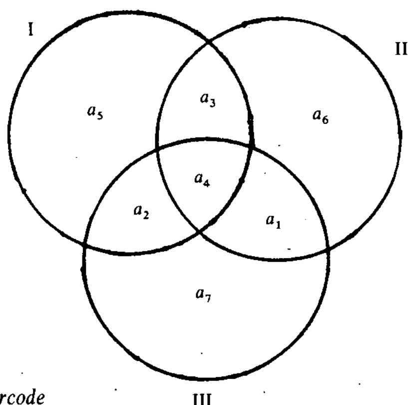


Figuur 2

Foutenverbetering

Een simpele manier om fouten te verbeteren maakt gebruik van een oud didactisch principe: als 't gehoor iets niet begrepen heeft, dan *herhaalt* men de bewering! Als we in plaats van een 0 (resp. 1) 00000 zenden (resp. 11111) dan mogen van deze vijf symbolen er twee door het kanaal veranderd worden zonder dat dit de ontvanger in moeilijkheden brengt. Hij laat bij ieder vijftal de meerderheid beslissen of het 0 of 1 moet zijn. Een aardig vraagstuk voor een les over waarschijnlijkheidsrekening is het volgende. We zenden eerst 43 = 101011 over een kanaal met foutenkans $p = 0{,}01$. Wat is de kans op goed overkomen? Nu gebruiken we de boven genoemde 'herhalingscode'. Wat is nu de kans op goed overkomen? De verbetering is geweldig maar de tol die we betalen ook! Het duurt nu *vijf* keer zo lang om een boodschap over te brengen. We zullen hiervoor een maat invoeren. In ons voorbeeld zeggen we dat de *informatiesnelheid* gelijk is aan $\frac{1}{5}$. Iedere vijf bits die we ontvangen geven slechts één bit informatie. De rest is 'redundantie' die ons helpt bij het verbeteren van fouten maar verder nutteloos is.
We bespreken nu meteen de hoofdprincipes van *codering* voor foutenverbetering. Verdeel de informatiestroom in 'blokken' van elk k bits. Via het zgn. coderingsalgoritme wordt een k-tal afgebeeld op een n-tal bits ($n > k$).
In dit geval is de informatiesnelheid $^k/_n$. Hoe dichter bij 1 hoe liever! Bij de CD is deze snelheid 0,75. Hoe we deze afbeelding van $\{0,1\}^n$ moeten construeren is één van de hoofdonderwerpen in de coderingstheorie.
Wat we moeten nastreven is eenvoudig uit te leggen m.b.v. onze eigen taal. Als we een lang Nederlands woord lezen met één of enkele drukfouten er in (bijvoorbeeld: wiqkunzige) dan kunnen we i.h.a. wel zien welke letters fout zijn en ze verbeteren. Als het lukt dan is dat omdat wij slechts één Nederlands woord kennen dat lijkt op wat er gedrukt staat. Beschouw nu twee rijtjes $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ uit $\{0,1\}^n$. We definiëren de *afstand* $d\ (\underline{x}, \underline{y})$ van deze rijtjes door $d\ (\underline{x}, \underline{y})$: $= |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$, met andere woorden: $d(\underline{x}, \underline{y})$ is het aantal plaatsen waarin de rijtjes x en y verschillen. De rijtjes $\underline{x}$ die kunnen ontstaan uit een aangeboden k-tal informatiebits noemen we *codewoorden*.

Als ieder tweetal verschillende codewoorden afstand $\geq 2e + 1$ heeft, dan kunnen we ons tot e fouten per verzonden woord permitteren zonder dat de ontvanger in moeilijkheden komt.
We spreken dan van een *e-fouten – verbeterende code.*
Het voorafgaande formuleren we nu iets strenger. We kiezen een *alfabet* van q symbolen; in de praktijk is dit steeds een eindig lichaam (veld) $\mathbb{F}_q$ [3], [4], (voor de CD is gekozen voor $\mathbb{F}_{2^8}$, een lichaam waarin iedere letter overeenkomt met een rijtje van 8 bits). Een $[n,k]$ code C is een k-dimensionale lineaire deelruimte van de vectorruimte $(\mathbb{F}_q)^n$, waarin we de afstand net zo definiëren als boven, nu met x_i en y_i symbolen uit $\mathbb{F}_q$. De *minimum afstand* van C is het minimum van $d(x, y)$ over alle paren verschillende vectoren (= woorden) uit C. Is $d = 2e + 1$ dan is C e-fouten verbeterend. Een extra voordeel hierbij is dat dicht bij elkaar liggende fouten in de bits slechts één of twee symbolen beïnvloeden (die immers uit acht bits bestaan).



Figuur 3 Kindercode

Als illustratie van het voorafgaande behandelen we de 'kindercode' van McEliece en geven daarna de abstracte formulering van hetzelfde idee. Op een school moeten de leerlingen *vier* vragen beantwoorden met ja of nee, de antwoorden op een briefje schrijven en inleveren. De briefjes worden naar de leraar gebracht door een onaangename jongen, die één van de meisjes dwarszit door op weg naar de leraar één van haar antwoorden snel en stiekem te veranderen! Als wapen hiertegen spreekt het (slimme!) meisje het volgende met de leraar af: (zowaar een nuttige toepassing van een Venn-diagram).

De vier antwoorden a_1 t/m a_4 worden geplaatst in de figuur. Daarna komen er nog drie keer 'ja' of 'nee' op a_5 t/m a_7 en wel zó dat elk der cirkels een *even* aantal keren ja en nee heeft. Stel dat de vervelende jongen a_1 verandert.
De pariteit van 'ja' in de cirkels I, II, III is daarna even, oneven, oneven, d.w.z. II en III zijn verkeerd. Daar a_1 het enige antwoord is dat in II én in III maar niet in I ligt, weet de leraar dat a_1 is veranderd. Hij *verbetert* de 'fout'. Nu, hetzelfde in de taal van de algebra.
Laat C de 4-dimensionale deelruimte zijn van $\mathbb{F}_2)^7$ opgespannen door de rijen van de matrix G, met

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Voeg aan de 'informatie' $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ toe het 'codewoord' $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = \underline{a}\, G \in (\mathbb{F}_2)^7$. Zo ontstaan 16 mogelijke codewoorden met onderlinge afstand ≥ 3. Dus is deze code 1 – fout – verbeterend. De lezer dient nu zelf na te gaan dat hier opnieuw de 'kindercode' is beschreven, nu in z'n officiële gedaante nl. als de [7,4] *Hamming code.*

Oefening Ga na dat als de jongen kans ziet i.p.v. één antwoord te veranderen er twee uit te gommen, ook dan het meisje er géén schade van ondervindt.

De Singleton grens

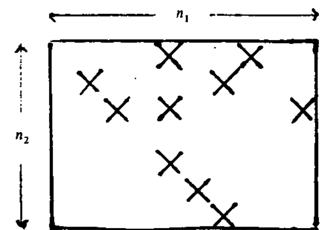
We geven nu een voorbeeld van een eenvoudig (maar leuk) stukje wiskunde uit de coderingstheorie, nl. de pessimistische kant: wat is zeker niet haalbaar. We kiezen weer een alfabet met q letters en beschouwen een code C met woorden van n letters en onderlinge afstand $\geq d$. Hoe veel woorden kan C dan hebben? Welnu, maak een lijst van deze woorden (het aantal noemen we $|C|$). Van alle woorden laten we de laatste $d - 1$ letters weg. Nog steeds zijn de (kortere) woorden verschillend! Onze conclusie is dat $|C| \leq q^{n-d+1}$. Stel nu dat de code C een k-dimensionale lineaire deelruimte is van $\mathbb{F}_q^n$. Dan is $|C| = q^k$. Daarmee is dan bewezen dat $k \leq n - d + 1$. Bij gegeven n en d is dit het beste dat men kan hopen te bereiken.

Reed – Solomon codes

Eén van de belangrijke ingrediënten van het foutenverbeterende systeem van de CD is een zgn. Reed – Solomon code. Het principe is met enige goede wil zelfs wel uit te leggen aan middelbare scholieren met gebruik van reële getallen of als men de leerlingen kan laten slikken dat er zoiets is als een eindig lichaam $\mathbb{F}_q$ ('rekenen met de symbolen is mogelijk'). We beschouwen nu informatie in de vorm van een zeer lange rij *letters* = elementen van $\mathbb{F}_q$. We hakken deze rij in blokken van steeds k letters. De RS code is een k-dimensionale code in $(\mathbb{F}_q)^n$, d.w.z. dat we moeten vertellen hoe een k-tal $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) \in (\mathbb{F}_q)^k$ wordt omgezet in een codewoord $(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) \in (\mathbb{F}_q)^n$. We maken eerst de veelterm $a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_{k-1} x^{k-1}$. Laat $\mathbb{F}_q = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}\}$.
Definieer $A_i := a(\alpha_i)$, $(0 \leq i \leq q - 1)$. Wat kunnen we van de afstand van deze code zeggen? Welnu, als het rijtje $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ aanleiding is tot het codewoord $\underline{A}$, en het rijtje $\underline{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{k-1})$ aanleiding tot het codewoord $\underline{B}$, dan is de afstand van $\underline{A}$ tot $\underline{B}$ gelijk aan het aantal indices i zó dat $A_i \neq B_i$. Dit is echter hetzelfde als het aantal elementen α_i van $\mathbb{F}_q$ zó dat $a(\alpha_i) \neq b(\alpha_i)$.
De veelterm $a(x) - b(x)$ met graad $\leq (k - 1)$ kan niet meer dan k-1 nulpunten hebben. Daaruit volgt dat zeker $n - (k - 1)$ keer geldt $A_i \neq B_i$. Deze code heeft dus minimum afstand $d \geq n - k + 1$. De Singleton grens vertelt ons dat $d \leq n - k + 1$ en dus is $d = n - k + 1$.

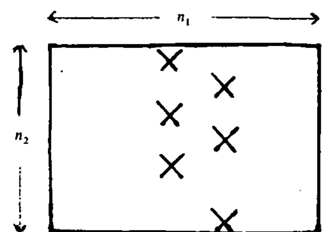
Product Codes

We geven nu nog in het kort een idee van één van de coderingsprincipes die een grote rol spelen bij de CD, nl. het gebruik maken van twee codes die op de een of andere manier *samenwerken*. Bij de CD zijn deze samenwerkende codes allebei (ingekorte) RS codes.
Het eenvoudigste voorbeeld zijn de zgn. product codes. Er is weer een alfabet $\mathbb{F}_q$ gekozen en we beschikken over twee lineaire codes C_1 en C_2 met parameters $[n_1, k_1]$ resp. $[n_2, k_2]$.
De aangeboden informatie splitsen we in blokken van $k_1 k_2$ letters die we gebruiken om een rechthoek met k_1 kolommen en k_2 rijen te vullen. Eerst wordt iedere rij via het coderingsalgoritme van C_1 omgezet in een rij van n_1 symbolen. De nieuwe rechthoek heeft afmetingen k_2 bij n_1. Daarna wordt iedere kolom via het coderingsalgoritme van C_2 omgezet in een codewoord van C_2 zodat tenslotte een n_2 bij n_1 rechthoek ontstaat. Deze rechthoek wordt nu *niet* rij voor rij uitgelezen en verzonden maar in een andere volgorde, die zo is gekozen dat een burst error in de oorspronkelijke rechthoek wordt verspreid over diverse rijen en kolomen. Via een zeer eenvoudig voorbeeld tonen we een groot voordeel van deze methode.
Stel dat C_1 en C_2 beide minimum afstand 3 hebben. De product code heeft dan afstand 9 (oefening voor de lezer). We verwachten dus 4 fouten in een ontvangen woord te kunnen verbeteren en mogen a priori niet op meer hopen. In figuur 4 geven de kruisjes aan waar de fouten in een ontvangen woord zich bevinden.



Figuur 4

Er zijn tien fouten! Dat ziet er niet zo best uit. We laten de decodeerprocedure van de code C_2 op de kolommen los. Er zijn vijf kolommen met slechts één fout en in elk van die kolommen wordt deze fout dus verbeterd. Laten we aannemen dat de fouten in kolom 5 toevallig een codewoord vormen. Die blijven dan staan. In kolom 7 is het nog erger. De procedure maakt er een fout bij met als resultaat figuur 5.



Figuur 5

De decodeerprocedure van de code C_1 gaat nu op de rijen werken en daar in ons voorbeeld iedere rij niet meer dan één fout heeft, worden in deze tweede slag alle fouten verbeterd.
In de praktijk is de situatie veel ingewikkelder maar het idee dat er achter zit is hierboven weergegeven. Tenslotte noemen we nog één van de trucs die bij muziek mogelijk zijn. De decodeerprocedure kan falen of wellicht zó veel 'fouten' verbeterd hebben dat, enige twijfel bestaat aan de juistheid van deze verbetering. In beide gevallen kan het resultaat worden voorzien van een waarschuwingsteken: 'onbetrouwbaar'. Als bij de reconstructie van het signaal (digitaalanaloog conversie; de omkering van figuur 2) een waarde optreedt die als onbetrouwbaar is bestempeld, dan wordt op die plaats geïnterpoleerd. Zo worden vele niet-verbeterbare foutenpatronen toch nog *gemaskeerd!*

Slot

Ik heb gepoogd om aan de hand van een bekend recent product een idee te geven van wat fouten – verbeterende codes zijn en hoe ze toegepast worden. Coding theory is een fascinerend vak waarin hulpmiddelen uit allerlei delen van de wiskunde een rol spelen. Desondanks is het mogelijk er onderwerpen in te vinden die zich lenen voor behandeling op het niveau van middelbaar onderwijs en soms (zoals ik heb aangetoond) zelfs lager onderwijs.

Literatuur

1 'Compact Disc Digital Audio', Philips Technisch Tijdschrift, Jaargang 40 (1981/2) no. 9. p. 265-296.
2 J. B. H. Peek, Communications Aspects of the Compact Disc Digital Audio System, IEEE Communication Magazine, Vol 23. No. 2, p. 7-15.
3 R. Lidl and H. Niederreiter, Finite Fields, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1983.
4 Discrete Wiskunde II, Collegedictaat T.U.E. 1987 (J. H. van Lint). (Hierin staat alles wat voor dit artikel nodig is over eindige lichamen op de eerste 5 bladzijden; voor belangstellenden is op aanvraag een kopie beschikbaar.)

Verschenen

S.L.O., *Leermiddelengids Wiskunde/Rekenen/Informatica,* *f* 12,75.
De Centrale Registratie Leermiddelen geeft jaarlijks voor het voortgezet onderwijs overzichten uit per vakgebied. De bovengenoemde gids geeft leraren wiskunde etc. een volledig overzicht van wat er aan methoden, leerboeken en educatieve software verkrijgbaar is.
Een titel- en auteursregister maken de gids op verscheidene manieren toegankelijk.

Berry c.s., *Mathematical Modelling Courses*, Ellis Horwood, 36.50, 281 blz. en Berry c.s., *Mathematical Modelling Methodology, Model and Micros*, Ellis Horwood, 38.50, 318 blz.
Deze twee boeken van dezelfde auteursteams beschrijven het opzetten van cursussen Wiskundige Modellen, waarbij het eerstgenoemde boek de meer theoretische aspecten behandelt terwijl het tweede meer de praktische kant benadert. Veel aandacht wordt besteed aan de werkelijkheidswaarde van de te ontwikkelen modellen.

Dirickx, Baas, Dorhout, *Operationele Research*, Adademic Service, *f* 60,–, 373 blz.
De belangrijkste methoden en technieken uit de OR, zoals (niet-) lineaire programmering, netwerkproblemen en geheeltallige programmering komen in dit boek aan de orde. Aan de hand van praktijkvoorbeelden wordt uitvoerig ingegaan op de modelmatige aspecten. Per hoofdstuk is een flink aantal opgaven opgenomen.

G. Tsu-der-Chou, *dBase III Handboek*, Academic Service, *f* 68,–, 364 blz.
Dit boek wil een leerboek zijn voor gebruikers van dit populaire databasepakket en is daarmee een uitbreiding op de door de dealer geleverde documentatie. D.m.v. vele voorbeelden en een uitgewerkt praktijkvoorbeeld wordt de lezer geleerd een op persoonlijke wensen toegesneden datasysteem te ontwerpen. Het boek is o.a. voorzien van een lijst met alle dBase III functies.

E. Verhulst, *MODULA-2*, Academic Service, *f* 68,–, 390 blz.
In dit boek wordt op de eerste plaats de programmeertaal MODULA-2 behandeld. Daarnaast wordt veel aandacht besteed aan het ontwerpen van softwaresystemen met behulp van modulen. Daarbij wordt gebruik gemaakt van een als standaard voorgestelde module bibliotheek.
Enige voorkennis van het ontwerpen van algoritmen en de taal PASCAL wordt verondersteld.

Zoek het functie-voorschrift met de computer

Een computerprogramma voor grafieken in de klas

Douwe Kok, Marianne Pranger

Inleiding

In het schooljaar 1986/1987 werd door Douwe Kok en Piet van Blokland namens de vakgroep 'Didaktiek van de wiskunde' aan de Vrije Universiteit een experimentele cursus 'Micro-computers in het wiskunde-onderwijs' verzorgd. Marianne Pranger nam deel aan deze cursus.
In deze cursus kwamen onder meer aan de orde:
- De rol van een grafisch pakket in het analyse-onderwijs
- Statistiek en de computer
- Het opstellen van modellen die door de computer worden doorgerekend
- De mogelijkheden van spreadsheets voor het wiskunde-onderwijs
- De functie van shortliners (kleine programma's van max. 20 regels) in de les.

Doel van de cursus was o.a. de deelnemers voorbeelden te tonen van de verschillende manieren waarop computers binnen het huidige wiskunde-onderwijs ingezet kunnen worden. Belangrijk daarbij was dat de deelnemers al doende een visie konden ontwikkelen op het gebruik van computers binnen hun lessen. Tevens was het de bedoeling de docenten de beschikking te geven over software en daarbij horende les-ideeën, zodat men zelf in de eigen klas aan de slag zou kunnen gaan. Zo zou de praktijk aan bod kunnen komen. Ook hier geldt immers dat tussen droom en daad praktische bezwaren in de weg staan.
De programma's waarmee we werkten waren geschreven voor NIVO-apparatuur of computers die daarmee compatibel waren. Bij het onderdeel 'de rol van een grafisch pakket in het analyse-onderwijs' in het programma VU-GRAFIEK gebruikt.
Marianne Pranger heeft het onderdeel 'Zoek het functievoorschrift' van dit pakket in een gewone les-situatie uitgeprobeerd.
In dit artikel brengen we daarvan verslag uit. Daarvoor is het nodig dat we eerst iets over het programma vertellen.

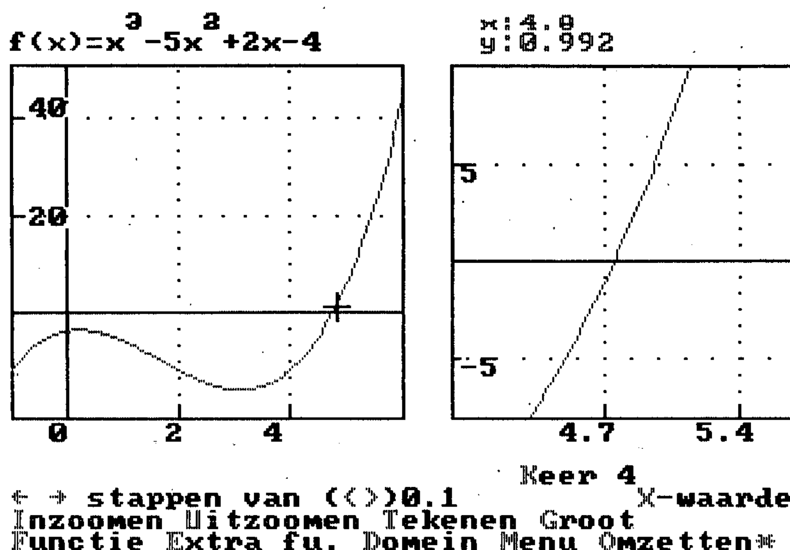
Het programma VU-GRAFIEK

Enkele jaren geleden maakten we (Piet van Blokland en Douwe Kok) kennis met 'Graphic Calculus'. Dit door David Tall voor de BBC-computer ontwikkelde programma maakte om een aantal redenen diepe indruk op ons (1).
- Het programma is zeer leerling-vriendelijk
- De manier van noteren ligt dicht bij de manier die we in de klas gewend zijn
- Aan het programma ligt een didactische visie ten grondslag die ons aanspreekt
- Het pakket overdekt een groot gedeelte van het analyse-onderwijs in de bovenbouw

Eindelijk zagen we een pakket dat aansloot bij onze ideeën over goed onderwijs; onderwijs waarin bijvoorbeeld begripsvorming een centrale plaats inneemt.

Deze ervaring inspireerde ons een grafisch pakket te ontwikkelen dat zou draaien op een NIVO-computer, voor ons besef dan misschien wel niet de machine van de toekomst, maar toch in elk geval wel een apparaat dat de komende jaren op elke school te vinden zou zijn.
VU-GRAFIEK is bedoeld als een stuk gereedschap dat bruikbaar is bij het analyse-onderwijs. Het kan al benut worden in de onderbouw, bij de behandeling van lineaire en kwadratische functies, maar de werkelijke kracht van VU-GRAFIEK wordt pas zichtbaar in de bovenbouw.

VU-GRAFIEK is een menu-gestuurd programma. Het belangrijkste onderdeel van het pakket is 'Grafieken tekenen' van een willekeurige functie. De functie wordt ingetypt. Er wordt naar het domein gevraagd. Eventueel kun je ook de grenzen van het bereik aangeven. Daarna wordt de grafiek op het scherm getekend.



Figuur 1

De kracht van het programma ligt in het feit dat je het domein (evenals trouwens het bereik) van de functie willekeurig kunt variëren. Je kunt dus een globale tekening van een grafiek krijgen, maar ook een gedetailleerde en dat van elk willekeurig gedeelte van de grafiek. Het programma kan twee grafieken naast elkaar tekenen. Dat gaat met het onderdeel 'Uitvergroten'.

Het intypen van de functies gaat ook heel gemakkelijk: machten verkrijg je door met de pijltjestoetsen omhoog en na het intypen van de gevraagde macht weer omlaag te gaan. De coëfficiënt en de variabele kunnen gewoon aan elkaar ingetypt worden:
het hinderlijke maal-teken, dat bij BASIC zoveel problemen veroorzaakt, kan achterwege blijven. Het programma heeft nog meer mogelijkheden, zoals uit het hoofdmenu van VU-GRAFIEK blijkt:

1. Zoek het functie-voorschrift
2. Grafieken tekenen
3. Uitvergroten
4. Differentiëren
5. Integreren
6. Oplossen van vergelijkingen
7. Taylor-polynomen
8. Differentiaal-vergelijkingen
9. Functies van meer veranderlijken

P. Parametervoorstellingen voor krommen
T. Niveau-lijnen

VU-GRAFIEK in de les

Wanneer je een programma als VU-GRAFIEK ziet, komt altijd de vraag op: wat kun je er mee doen in de klas? Is het nuttig, uitdagend, een echte toevoeging aan de gewone les? Als al deze vragen positief beantwoord kunnen worden, ben je er nog niet. Je kunt de leerlingen niet zomaar achter de computer zetten en zeggen: kijk eens wat een mooi programma, zoek maar uit wat het allemaal kan. Je moet als leraar in je hoofd hebben wat de leerlingen ongeveer in zo'n les moeten opsteken en nagedacht hebben over de organisatie van de les.
Bij het uitproberen leek het aantrekkelijk om met een eenvoudig onderdeel van VU-GRAFIEK te beginnen. 'Zoek het functievoorschrift' is geen gecompliceerd programma en als je bovendien kiest voor lineaire functies kan er toch niet al te veel mis gaan.
In de 3 havo- klas van Marianne Pranger waren in november grafiek en functievoorschrift van lineaire functies aan de orde geweest. Door omstandigheden was wat weinig tijd beschikbaar om dat goed te oefenen. Toen het programma VU-GRAFIEK in beeld kwam, leek het een goed idee om de stof met behulp van het onderdeel 'Zoek het functievoorschrift' weer wat op te halen.
Dat de leerlingen van 3 havo dat jaar al een korte informatiecursus achter de rug hadden, kwam goed

van pas. Ze hadden dus al eerder in klasseverband achter de computer gezeten. Dit was een mooie gelegenheid ook eens iets met de computer te doen tijdens een ander vak dan informatica.

Hoe zit het onderdeel 'Zoek het functievoorschrift' in elkaar?

In alle wiskundeboeken voor het voortgezet onderwijs komen opgaven voor van het type: 'teken de grafiek van $f(x) = \ldots$' Dat begint meestal in de tweede klas met eerstegraadsfuncties en het eindigt op het examen met het vermaarde functie-onderzoek. Het omgekeerde probleem: 'Hier staat de grafiek van een functie. Welk functievoorschrift hoort erbij?' treft men minder frequent aan. Toch kan het zoeken van een functievoorschrift bij een gegeven grafiek een belangrijke activiteit zijn. De leerling moet dan zijn aandacht richten op de kenmerken van de grafiek. In het geval van een rechte lijn zijn dat bijvoorbeeld de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de y-as. Bij een parabool moet gelet worden op waar de top ligt of waar deze kromme de x-as snijdt.

Dit soort opgaven kunnen heel geschikt per computer aangeboden worden. Immers, in een oogwenk heeft de computer de grafiek bij het opgegeven voorschrift getekend. En uit het plaatje, waarin zich de oorspronkelijke grafiek en de 'nieuwe' grafiek bevinden, kan de leerling opmaken in welk opzicht de voorgestelde functie voldoet en in welk opzicht niet. Bovendien is de computer geduldig en altijd weer bereid oude grafieken weg te vegen en er alternatieve voor in de plaats te stellen.

Het onderdeel 'Zoek het functievoorschrift' binnen VU-GRAFIEK heeft de volgende opbouw:

- Allereerst mag de leerling kiezen of hij eenvoudige of moeilijker opgaven wil
- Vervolgens kan hij kiezen uit verschillende soorten functies
- Heeft de leerling een keuze gemaakt, dan wordt de leerling gevraagd een van de getallen 1 tot en met 16 in te typen. (Er zijn bij elke soort 16 mogelijkheden.)

Daarna verschijnt op het scherm de grafiek van een functie, waarbij een functievoorschrift gezocht moet worden. Wanneer een functievoorschrift ingetypt wordt, tekent de computer de bijbehorende grafiek. Bij kleurenmonitoren gebeurt dit in een andere kleur, bij monochrome monitoren in een andere tint. De leerling ziet dus gelijk of zijn functievoorschrift goed of fout is. Is het ingetypte functievoorschrift fout dan stelt de computer de vraag of je nog een poging wilt wagen.

Onderstaand plaatje komt uit de serie 'Kwadratische functies'. De proefpersoon bedacht het voorschrift $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Zoals u ziet biedt de computer een nieuwe kans en daarmee de mogelijkheid een ander voorstel te doen.

```
****************************************
*                                      *
*     Zoek het functie-voorschrift     *
*                                      *
****************************************

Welk type functie zou je
willen proberen ?

     Lineaire

     Kwadratische

     Derde machten

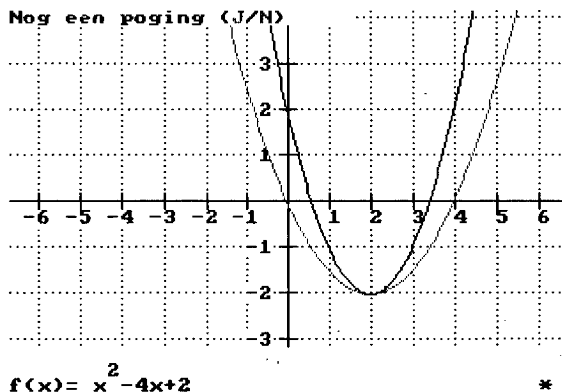
     Goniometrische

     Exponentiele

     Absolute waarde

     Mengsel
     Stoppen
```

Figuur 2



Figuur 3

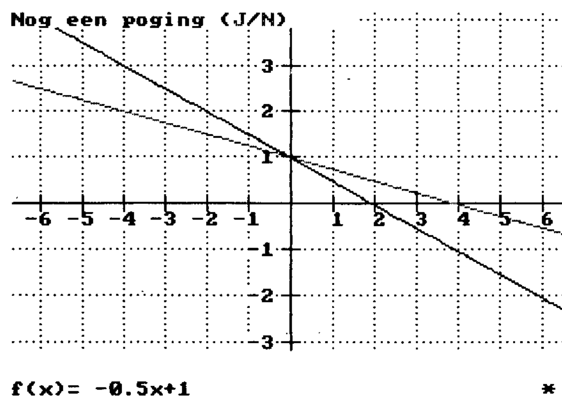
Zoals gezegd horen bij elk type 16 van te voren bedachte functies. VU-GRAFIEK zit echter zo in elkaar dat het voor een leraar die zich een beetje thuis voelt in MS-DOS een kleine moeite is zijn eigen opgaven in te voeren.

Organisatie van de les

De organisatie van de les had twee aspecten: welke opdrachten geef je de leerlingen en hoe laat je die uitvoeren als je maar 8 computers hebt en 26 leerlingen.
Het eerste hebben we ondervangen door de leerlingen stencils te geven waarop precies stond wat ze moesten doen om het programma op te starten en hoe ze het menu moesten doorlopen. Er werd ook een voorbeeld doorgenomen. Het laatste blad was een werkblad: hierop stonden voor het beginnersniveau en voor het middenniveau elk 3 nummers opgegeven. De functievoorschriften moesten per groepje gemaakt en ingeleverd worden. Op elk werkblad stonden andere nummers. Deze waren door de docent uigezocht, zodat niet elk groepje dezelfde opdracht van de computer kreeg en er grafieken met de nodige variatie aan bod kwamen.
Zoals gezegd: er waren acht computers beschikbaar voor 26 leerlingen. Wanneer er meer dan twee leerlingen aan een computer werken verslapt de betrokkenheid. Daarom werd de klas in tweeën gesplitst: 16 leerlingen achter de computer, 8 kregen een stencil met gewone opgaven over het onderwerp. Na 20 minuten zou er gewisseld worden.

De les zelf

Tijdens de les viel op dat beide groepen leerlingen geconcentreerd aan het werk waren. De meeste groepjes konden zonder hulp met het computerprogramma aan de gang. Na 20 minuten waren zoveel groepjes klaar dat de overige leerlingen met de computer aan het werk konden. Sommigen deden er wat langer over en kregen daar ook de kans voor.
Hoewel de les voorafgaand aan de les met de computer nog enige aandacht was besteed aan de grafiek van een rechte lijn, hadden sommige leerlingen toch hulp nodig bij het vinden van de functievoorschriften. De verschillen in begaafdheid kwamen duidelijker naar voren dan in een gewone les: als docent overzie je nu eenmaal sneller de resultaten op een computerscherm dan in de schriften. Maar de leerlingen die het moeilijk vonden hielden er wel plezier in. Het werken met de computer frustreert kennelijk minder snel dan gewoon in je schrift werken en er niets van snappen.
Een groot voordeel van het werken met de computer is ook dat de grafieken die de leerlingen te zien krijgen er altijd netjes uitzien. Dit in tegenstelling (veelal) met door hen zelf getekende grafieken.
Hoe de computer het leerproces kan sturen, laat zich illustreren aan opgave 8 van het middenni-



Figuur 4

veau. Op het beeldscherm verschijnt de grafiek van $y = -0.25x + 1$. De leerlingen proberen $y = -0.5x + 1$. Zo, die 1 is in elk geval goed, noteert men tevreden. Nu de richting nog. O ja, natuurlijk niet 0.5, maar 0.25. Ze typen in: $y = 0.25x + 1$, onmiddellijk wordt duidelijk waar de vergissing zit: een minnetje vergeten. En inderdaad: na het antwoord $y = -0.25x + 1$ verschijnt 'gevonden' in beeld.

Na de les

Als leraar wil je weten of leerlingen iets van een les hebben opgestoken, maar ook of ze het leuk gevonden hebben. En hoewel een positief antwoord op beide vragen meestal niet haalbaar is, is dat toch het doel waarnaar wij streven.

De eerstvolgende les kregen de leerlingen een (niet van te voren aangekondigd) schriftelijk werk waarin ze het functievoorschrift bij drie getekende grafieken moesten geven, nu zonder computer. De meeste leerlingen scoorden 100%, een leerling bracht er niets van terecht en drie leerlingen maakten nog fouten.

Het onderwerp is natuurlijk beperkt, maar de grondbeginselen van eerstegraads functies werden door deze klas beheerst. Ook werd hun gevraagd wat ze vonden van het op deze manier werken met de computer.

De waardering van het werken met de computer varieerde van: leuk, minder saai dan een gewone les, je krijgt meteen feedback, moeten we vaker doen (de meesten) tot wel aardig, maar erg langzaam (van enkele 'computerdeskundigen'). Een leerling, die echt iets van computers weet, vond het programma er 'verzorgd' uitzien.

(a) 4. Schrijf in een paar regels op wat je van het computerprogramma "zoeken" vond (leuk, leerzaam .....). Ik vond het hartstikke leuk al snapte ik er niks van!

(b) 4. Schrijf in een paar regels op wat je van het computerprogramma "zoeken" vond (leuk, leerzaam .....). Door zo'n programma wordt wiskunde echt leuk, als je een antwoord niet goed had kon je het nog een keer opnieuw proberen en zo werd het een echt spel.

(c) Ik vond het wel lachen, zo leer je op een leuke manier hoe je zo'n vgl moet berekenen is voor herhaling zatbaar? niet zo saai als een gewone les.

langzaam, orgineel
voor herhaling geschikt... bruikbaar.

(d) 4. Schrijf in een paar regels op wat je van het computerprogramma "zoeken" vond (leuk, leerzaam .....) Ik vond het leuk en je kreeg tenminste herkansingen.

Figuur 5

Conclusie

Dit experiment met lesgeven met behulp van de computer is ons (en de leerlingen) goed bevallen. Wel is het essentieel het nodige voorwerk te verrichten.
We hebben het onderdeel 'Zoek het functievoorschrift' gebruikt om leerstof die al aangebracht was, nog eens op te halen. Je kunt je voorstellen dat je hetzelfde programma gebruikt om de leerlingen te leren wat richtingscoëfficiënten zijn, maar ook om ze te laten zien hoe de verschuivingsvector werkt. Bij elk van deze mogelijkheden moet je dan een ander lesplan maken en dus andere werkbladen.
We zijn van plan om in het komende cursusjaar nog enkele onderdelen in de les uit te proberen. We denken daarbij aan: zoeken naar de afgeleide van een functie, differentieerbaarheid van functies, tekenen van grafieken van families van functies. We hopen u daar in dit blad weer verslag van te doen.

Noot

1 Tall, D.O.; *Graphic Calculus I, II, III*, Glentop Press, London.

```
****functievoorschriften zoeken***

Het programma dat je nu gaat gebruiken doet het volgende: de
computer tekent de grafiek van een rechte lijn en vraagt jou daar
een functie voorschrift bij te zoeken. Lees het onderstaande goed
door. Er wordt er eerst één voorgedaan, daarna moet je er zes
zoeken: drie van het beginners niveau en drie op het
middenniveau.
Het functievoorschrift dat door de computer goed gekeurd is
noteer je op je stencil.

%Stop de diskette in de A-drive. Op het scherm komt nu A>.
 Type in: grafiek

Er verschijnt een plaatje met daarop "VU". Rechts beneden
staat een *, dat betekent: Enter in drukken om door te gaan.

Dan krijg je het volgende scherm:

    ****************************************
    *  Zoek het functie-voorschrift        *
    ****************************************

    1. Beginnersniveau
    2. Middenniveau
    3. Zelf opgeven functie

    0. Menu
    Wat wil je?
                                           *

%Kies vóor 1.

Er komt een scherm met verschillende typen functies.

%Kies voor Lineaire functies, door een L in te typen.

Hieronder volgt een voorbeeld:

%Type een 1 in.

Je krijgt een grafiek op het scherm. Onderaan het scherm kun je
een functie-voorschrift invullen.

%Type in: 3x

De computer tekent nu de grafiek van de functie f(x)= 3x.
Dat is fout.
Links boven zie je nu de vraag staan: "nog een poging?"

%beantwoord de vraag met Ja.
 Op de vraag "schoonmaken?" mag jezelf weten wat je antwoordt.
 Type nu : 2x

Dat is goed. De computer antwoordt met "gevonden" en na Enter kun
je een nieuw nummer in typen. Kies de nummers, die op jouw
stencil staan.
```

Over de auteurs:
Douwe Kok is vakdidacticus wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam.
Marianne Pranger is lerares wiskunde aan het Christelijk Lyceum te Zeist.

Vademecum

Supplement

Het nieuwe programma voor wiskunde havo is verschenen en dient dus in het Vademecum te worden opgenomen.
Hiernaast vindt u acht bladzijden waarop dit programma vermeld is. De bladzijden zijn genummerd 13, 14, 14a, 14b, 14c, 14d, 14e, 14f. Uit het oorspronkelijke Vademecum moeten de bladzijden 13 en 14 verwijderd worden en vervangen door deze acht bladzijden.

Wijzigingen adreslijst

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Bestuur

schrappen: L. Bozuwa

toevoegen:
mw. H. Goemans, Burgemeester Meslaan 117, 4003 CB Tiel, 03440-1 79 81

wijzigen:
M. Kindt, tweede secretaris, Kornedijk 4, 4116 CE Buren, 03447-21 48

Panama-Post

schrappen: E. W. A. de Moor

toevoegen:
mw. drs. E. Seijf, hoofdredacteur, A. Matthaeuslaan 47, 3515 AP Utrecht, 030-17 24 02

SLO
medewerkers voor wiskunde

schrappen: mw. drs. A. A. Kolste; drs. J. Speelpenning

J. ter Heege := drs. J. ter Heege
J. A. ter Pelle := drs. J. A. ter Pelle

toevoegen:
drs. G. F. C. M. van den Heuvel; mw. J. R. ten Hove; drs. P. W. van der Zwaart

VALO Wiskunde en Informatica

VALO Wiskunde en Informatica, Nijverheidstraat 11, Enschede, postbus 2061, 7500 CB Enschede, 053-84 08 40

samenstelling:
drs. S. L. Kemme (voorzitter, namens NVvW); H. M. M. Jansen (secretaris); E. Dörr (namens NGI); W. Oonk (namens NVORWO); mw. W. M. G. Querelle (namens NVvW)

Landelijk Werkverbond Nascholing Wiskunde

wijzigen:
drs. L. J. M. Kuijk, voorzitter, Iepengaard 15, 5051 ZL Goirle, 013-34 76 87

VVWL

schrappen: Prof. dr. R. Holvoet

toevoegen:
A. Meskens, hoofdredacteur, Koolstraat 67a, B-2800 Mechelen, 015-20 52 31

wijzigen:
mw. G. Simons, voorzitter, Spoorweglaan 59, B-2610 Wilrijk, 03-4 49 24 42

Cito
medewerkers voor wiskunde

wijzigen:
H. Boertien
beginfasse voortgezet onderwijs

OW & OC en Nieuwe Wiskrant

drs. J. de Lange Jzn. := dr. J. de Lange Jzn.

Inspectie lbo

schrappen: J. J. G. Toutenhoofd

toevoegen:
A. de Jong, Diependaal 3, 6715 JS Ede, 08380-3 92 90
kantoor: Kemkersberg 6, 9722 TB Groningen, 050-64 91 11

CEVO
subsectie havo en vwo

schrappen: J. E. Broekhuizen

toevoegen:
drs. F. Köhne, namens AVS, Zuiderlaan 10, 9601 BD Hoogezand, 05980-9 37 77

Rectificatie

Wilt u met de pen wijzigen in Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven op blz. 38 regel 2:
Deze wordt gelegd bij 54/55 punten := Deze wordt in het midden gelegd
De correctie betreft de cesuurbepaling bij de lbo-mavo-examens.

zie ook pag. 120

Programma havo tweede en derde leerjaar

Irrationale getallen.
Metriek: lengten, oppervlakten en inhouden; enkele eigenschappen van rechthoekige driehoeken.
Eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden met één veranderlijke.
Relaties: de grafiek van een eerstegraads relatie: twee eerstegraads vergelijkingen met twee veranderlijken: eerstegraads ongelijkheden met twee veranderlijken.
Puntverzamelingen in het vlak.
Functies: de grafiek van een functie; eerstegraads en tweedegraads functies; tweedegraads vergelijkingen en ongelijkheden.
Vectoren in het vlak: vermenigvuldiging; gelijkvormigheid van figuren.
Beginselen van de beschrijvende statistiek.
De goniometrische verhoudingen sin, cos en tan; sinusregel en cosinusregel.
Eenvoudige berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte.

Eindexamenprogramma havo wiskunde A

1 Tabellen, grafieken, formules;
tabellen, grafieken en formules als representatievormen van verbanden:
$y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = ab^x$, $y = ax^b$ (a, b, c constant);
eigenschappen van grafieken: stijgen/dalen, progressief stijgen/dalen, toppen, asymptotisch gedrag;
differenties en differentiequotiënten als maat voor stijgen/dalen;
interpoleren, extrapoleren;
combineren van verbanden;
lineaire en exponentiële groei, groei volgens een machtsfunctie; periodieke verschijnselen, trends.

2 Matrices en netwerken:
matrices in diverse contexten;
gerichte en ongerichte netwerken, symmetrische en asymmetrische matrices;
optellen en vermenigvuldigen van matrices in verschillende contexten;
eenvoudige optimaliseringsproblemen: kortste wegen in een netwerk, lineair programma.

3 Statistiek en kansrekening:
beschrijvende statistiek;
populatie en steekproef;
normale verdeling;
kansrekening.

Duur van het schriftelijk examen: 3 uur.

Toelichting op het programma havo wiskunde A

De kandidaat behoeft geen kennis te hebben van de differentiaalrekening. Eigenschappen van grafieken kunnen op informele wijze aan de orde gesteld worden. Zo kan de kandidaat de snijpunten van twee grafieken in één figuur bepalen met behulp van een algebraïsche methode, maar bijv. ook door aflezen uit de grafiek, waarna het gevondene door substitutie gecontroleerd wordt.
Ook kan in voorkomende gevallen een benaderende waarde bepaald worden. Bij het combineren van verbanden behoeft de kandidaat geen kennis te hebben van de theorie van het samenstellen van functies. Wel dient het verband tussen twee grootheden aangegeven te kunnen worden, bijvoorbeeld door combinatie van grafieken of via substitutie.

Bij het onderwerp Matrices en netwerken komt het er vooral op aan dat de kandidaat een juiste interpretatie kan geven van bewerkingen en uitkomsten en tevens isomorfe situaties kan herkennen. Daarbij zal de kandidaat zowel het meetkundige model (de graaf) als het rekenkundige model (de matrix) dienen te hanteren en beide modellen in elkaar kunnen vertalen.
Bij matrices in diverse contexten wordt gedacht aan: afstandenmatrix, kostenmatrix, frequentiematrix, relatieve-frequentiematrix, directe-wegen matrix.

In de statistiek zal de kandidaat o.a. blijk moeten kunnen geven van een kritische evaluatie van statistische resultaten. De kandidaat behoeft geen theoretische kennis te hebben van bijvoorbeeld hypothese-toetsen en betrouwbaarheids-intervallen.
Van de kansrekening behoeft de kandidaat geen formeel-theoretische kennis te hebben. Bijvoorbeeld geen kennis van het formele begrip statistische onafhankelijkheid.

Van de in het programma genoemde onderdelen voor de statistiek en kansrekening dient de kandidaat kennis te hebben van de volgende onderwerpen:

Beschrijvende statistiek:

frequentie-tabel; klasse-indeling; relatieve en absolute frequentie;
cumulatieve frequentie;
sectordiagram, staafdiagram, histogram,
frequentiepolygoon;
gemiddelde, modus, mediaan;
standaardafwijking.

Populatie en steekproef:

ontwerp van statistische experimenten; generalisatie vanuit een steekproef;
bronnen van foutieve conclusies;
rol van kansrekening bij inductieve redeneringen.

Normale verdeling:

normale verdeling als model van een frequentieverdeling;
normale kromme, vuistregels (95% en 68%-interval);
gebruik van de standaardnormale tabel.

Kansrekening

intuïtief kansbegrip; wet van de grote aantallen;
toevalsgetallen, simulatie; verwachtingswaarde;
gebruik van boomdiagram, wegendiagram, roosterdiagram bij berekening van kansen;
optellen en vermenigvuldigen van kansen;
trekken met en zonder terugleggen;
de binomiale kansverdeling (driehoek van Pascal, tabel).

De onderwerpen Automatische Gegevens Verwerking, Rekenen en Redeneren zullen niet als aparte onderdelen ter sprake komen. Zij zullen geïntegreerd in de overige onderwerpen aan de orde gesteld worden.

Dat betekent

- voor Automatische Gegevens Verwerking:
  programma's waarbij functies worden ingevoerd; programma's voor operaties met matrices; simulatieprogramma's; statistische programma's; programma's voor recursieve betrekkingen.
- voor Rekenen:
  rekenen in een realistische context; inzichtelijk omgaan met getallen; verhoudingen en procenten; evenredigheid; omgekeerde evenredigheid; schatten, benaderen, gebruik van de zakrekenmachine; regelmaat in tabellen, getallenpatronen, substitutie in formules, controle van formules; omvormen van formules.
- voor Redeneren:
  aandacht voor redeneervormen in diverse contexten.

Eindexamenprogramma havo wiskunde B

1 Analyse:

oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden en stelsels van vergelijkingen en ongelijkheden;
afgeleide functie als maat voor geleidelijke verandering;
raaklijn van een grafiek;
regels voor het differentiëren van functies: som-, produkt-, quotiënt- en kettingregel;
extreme waarden en toepassingen; de goniometrische functies van de typen
$y = a \sin(bx + c) + d$, $y = a \cos(bx + c) + d$ en
$y = a \tan(bx + c) + d$ en eenvoudige combinaties hiervan; afgeleiden van goniometrische functies;
logaritmische en exponentiële functies en de afgeleiden hiervan;
primitieve functies.

2 *Ruimtemeetkunde:*

meetkundige lichamen: viervlak, piramide, prisma, balk, kubus;
onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken; punt- en lijnverzamelingen;
constructies van punten en lijnen m.b.v. verzamelingen;
constructies van doorsneden van vlakken met lichamen in ruimtefiguren en constructies van doorsneden in ware gedaante;
uitslagen van viervlak, piramide, prisma, balk, kubus;
coördinaten in de ruimte, parametervoorstellingen van een lijn, vergelijking van een vlak, richtingsvector en normaalvector, inprodukt;
berekening van hoeken, afstanden, oppervlakten, inhouden;
transformaties: vlak- en puntspiegeling, translatie, vermenigvuldiging ten opzichte van O.

14d *Duur van het schriftelijk examen: 3 uur.*

Toelichting op het programma havo wiskunde B

In de Analyse kan wat betreft het limietbegrip en de begrippen continuïteit en differentieerbaarheid volstaan worden met intuïtief begrip. Dit geldt eveneens voor het getal e.
De kandidaat behoeft geen limietberekeningen te kunnen uitvoeren.
Wel kunnen situaties uit bijvoorbeeld de natuurwetenschappen een belangrijke rol spelen. Te denken valt hierbij aan trillingen (bij goniometrische functies), groeiverschijnselen (bij exponentiële functies), snelheid en afgelegde weg.
Primitieve functies komen aan de orde bij oppervlakte- en inhoudsberekeningen.

Bij de ruimtemeetkunde ligt de nadruk op het ruimte-inzicht.
Vectormeetkunde vervult een bemiddelende rol en is derhalve geen doel op zich.
Zowel het constructieve als het algebraïsche aspect is in de ruimtemeetkunde van belang.
De algebraïsche methode staat in het programma havo wiskunde B in dienst van de meetkunde. Tekeningen zullen bij de meetkunde-vraagstukken onmisbaar zijn.

Ten aanzien van de transformaties wordt opgemerkt dat het hierbij niet in de eerste plaats gaat om transformatieformules, maar om bewegingen en spiegelingen van ruimtelijke objecten en om constructies van beeldfiguren.
Voor het programma ruimtemeetkunde is enige kennis van vlakke meetkundige figuren onontbeerlijk.

Van de punt- en lijnverzamelingen dient de kandidaat kennis te hebben van middelloodlijn en middelloodvlak, middenparallel en middenparallelloodvlak, middenparallelvlak, lijnenbundel.

De Automatische Gegevens Verwerking zal in het programma havo wiskunde B geïntegreerd in de andere onderwerpen ter sprake komen.
Het gebruik van de computer ten behoeve van numerieke aspecten van de analyse, het onderzoek van functies, optimaliseringsproblemen en de ruimtemeetkunde komen hierbij ter sprake.

De XXVIIIe Internationale Wiskunde Olympiade 1987

J. G. M Donkers

De 28e Internationale Wiskunde Olympiade werd dit jaar gehouden van 5 tot 16 juli in Havanna, Cuba. Het aantal deelnemers was groter dan ooit, n.l. 237 uit 42 landen. 37 Landen, waaronder Nederland, waren vertegenwoordigd met het maximaal toegestane aantal van zes deelnemers. De Nederlandse ploeg bestond uit de volgende deelnemers:
Reyer Gerlagh, Driebergen
Bas van den Heuvel, Dordrecht
Mark van Hoeij, Someren
Joris van der Hoeven, Amsterdam
Roel Janssen, Kampen
Marc de Jong, Deventer.
Vijf van hen behaalden een prijs. Roel Janssen een tweede prijs, Reyer Gerlagh, Joris van der Hoeven, Marc de Jong en Mark van Hoeij een derde prijs.
Op twee achtereenvolgende dagen (10 en 11 juli) kregen de deelnemers $4\frac{1}{2}$ uur voor drie opgaven. De maximale score per opgave bedroeg 7 punten.
In vergelijking met voorgaande jaren was het aantal deelnemers met de maximale score van 42 punten uitzonderlijk hoog, n.l. 22. Zij kregen allen een eerste prijs. Er waren 42 deelnemers (32 t/m 41 punten) die een tweede prijs kregen en 56 (18 t/m 31 punten) behaalden een derde prijs. In het officieuze landenklassement werd Roemenië eerste met het spectaculaire aantal van 250 punten, West-Duitsland was tweede en Rusland derde. Nederland kwam op de 14e plaats met 146 punten.
Onder de eerste prijswinnaars was één meisje, uit China. Er waren naar schatting maar ongeveer 15 vrouwelijke deelnemers. Opvallend was de deelname van een 11-jarige jongen uit Australië, die 40 punten scoorde.

Het volgend jaar zal de Olympiade worden gehouden in Australië. In de jaren 1989 en 1990 zullen resp. West-Duitsland en China gastland zijn. Ook voor de jaren negentig ziet het er voor de Olympiade gunstig uit.
Ondanks het jaarlijks toenemende aantal deelnemers en de daarmee gepaard gaande verhoging van de kosten, zijn er gelukkig toch voldoende landen bereid om de organisatie van een Olympiade op zich te nemen.

De Nederlandse ploeg

De heren drs. J. M. Notenboom (S.O.L. Utrecht) en drs. J. G.M. Donkers (T.U. Eindhoven) waren de begeleiders van de Nederlandse ploeg en hadden voor Nederland zitting in de internationale jury. Prof. dr. H. J. A. Duparc, voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie voor wiskunde, maakte dit jaar als waarnemer deel uit van de Nederlandse delegatie. De Nederlandse ploeg was geselecteerd uit de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1986. De voorbereiding op de internationale Olympiade door middel van lesbrieven werd verzorgd door J. Donkers.
Vijf leden van de Nederlandse ploeg hebben dit jaar hun eindexamen van de middelbare school gedaan. De zesde, Joris van der Hoeven zal het volgend jaar eindexamen doen.
De scores van de Nederlandse deelnemers zijn als volgt:

Opgave	1	2	3	4	5	6	totaal
Reyer Gerlagh	1	7	7	6	7	0	28
Bas van den Heuvel	0	7	1	0	7	0	15
Mark van Hoeij	0	0	7	6	7	0	20
Joris van der Hoeven	7	7	1	0	7	6	28
Roel Janssen	7	5	6	7	7	0	32
Marc de Jong	2	7	1	6	7	0	23

Rondom de Olympiade

De reis heeft op ons, begeleiders en deelnemers, een onvergetelijke indruk gemaakt. Cuba is een mooi land met een aangenaam klimaat en de Cubanen zijn spontane, hartelijke en behulpzame mensen.
De juryleden en begeleiders waren ondergebracht

in het comfortabele Rivièra-hotel aan de Malecon-boulevard in Havanna. De leerlingen verbleven in de Lenin-school, waar ook de wedstrijd is gehouden. Deze school is een internaat waar zo'n duizend leerlingen van 15-18 jaar gedurende drie jaar onderwijs krijgen dat hen voorbereidt op de universiteit. De Lenin-school is prachtig gelegen aan de rand van het grote Leninpark op ongeveer 15 km ten zuiden van Havanna. Gelukkig waren we al een week voor de wedstrijd aanwezig, zodat we na enkele acclimatiseringsprobleempjes toch een uitgeruste en gezonde ploeg hadden bij de aanvang van de wedstrijd. De muggenplaag in de school, die velen enkele slapeloze nachten (en de nodige bulten) bezorgde kon pas afdoende worden verholpen door iedereen te voorzien van een muskietennet.

Ondanks enkele rimpelingen in de organisatie bleef de stemming uitstekend. Er waren verschillende excursies georganiseerd o.a. naar de Varkensbaai zo'n 250 km ten zuid-oosten van Havanna, en 's avonds waren er op de Lenin-school culturele avonden met dans en muziek. Onze jongens hebben intensief gebruik gemaakt van de mogelijkheden die er waren om met deelnemers van andere landen contacten te maken. Een favoriete ontmoetingsplaats was het heerlijke zwembad van de school.
Op woensdag 15 juli vond de prijsuitreiking plaats in aanwezigheid van de Cubaanse minister van onderwijs. Er waren dit jaar geen extra prijzen voor bijzondere oplossingen.
De volgende dag zijn we in een ongedwongen en gezellige sfeer ontvangen door de Nederlandse ambassadeur in diens ambtswoning te Havanna. De enkele dagen die ons nog restten voor het vertrek hebben we doorgebracht aan het strand van Varadero.
Hierna volgen nog het landenklassement en de opgaven. Hiervan zijn de no's 1 en 3 voorgesteld door West-Duitsland, de no's 2 en 6 door de Sovjet-Unie en de no's 4 en 5 door resp. Vietnam en Oost-Duitsland.

Landenklassement

Totaal aantal punten per land

1.	Roemenië	250	20.	Griekenland	111
2.	West-Duitsland	248	21.	Turkije	94
3.	Sovjet Unie	235	22.	Spanje	91
4.	Oost-Duitsland	231	23.	Marokko	88
5.	U.S.A.	220	24.	Cuba	83
6.	Hongarije	218	25.	België	74
7.	Bulgarije	210	26.	Iran	70
8.	China	200	27.	Noorwegen	69
9.	Tsjechoslowakije	192	28.	Finland	69
10.	Groot Brittannië	182	29.	Colombia	68
11.	Vietnam	172	30.	Mongolië	67
12.	Frankrijk	154	31.	Polen (3)	55
13.	Oostenrijk	150	32.	IJsland (4)	45
14.	Nederland	146	33.	Cyprus	42
15.	Australië	143	34.	Peru	41
16.	Canada	139	35.	Italië (4)	35
17.	Zweden	134	36.	Argentinië	29
18.	Joegoslavië	132	37.	Koeweit	28
19.	Brazilië	116	38.	Luxemburg (1)	27
			39.	Uruguay	27
			40.	Mexico (5)	17
			41.	Nicaragua	13
			42.	Panama	7

Opgaven

1 Zij $p_n(k)$ het aantal permutaties van de verzameling $\{1,2,..., n\}$ die precies k invariante punten hebben. Bewijs:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$$

Opmerking: Een permutatie f van de verzameling S is een één-éénduidige afbeelding van S op zichzelf. Een element in S heet een invariant punt van de permutatie als $f(i) = i$.

2 In een scherphoekige driehoek ABC snijdt de bissectrice van hoek A de zijde BC in L en de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in N en A. K is de projectie van L op AB en M is de projectie van L op AC. Bewijs dat de oppervlakten van de vierhoek $AKNM$ en de driehoek ABC gelijk zijn.

3 Gegeven zijn reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ waarvoor geldt $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.
Bewijs dat er voor elk geheel getal k met $k \geqq 2$ gehele getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaan, niet alle gelijk aan 0, die voor alle i voldoen aan $|a_i| \leqq k - 1$, zodanig dat geldt

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

4 Bewijs dat er geen functie f bestaat met $f: N \to N$ zodanig dat voor alle natuurlijke getallen n geldt $f(f(n)) = n + 1987$.
$N = \{0, 1, \ldots\ldots\}$

5 Zij n een geheel getal groter dan of gelijk aan 3. Bewijs dat er n punten in het Euclidische vlak bestaan die voldoen aan
i) geen enkel drietal van de punten ligt op één lijn;
ii) elk tweetal van deze punten heeft een irrationale afstand;
iii) de oppervlakte van een driehoek bepaald door een willekeurig drietal van deze punten is rationaal.

6 Zij n een geheel getal groter dan of gelijk aan 2. Bewijs:
Als $k^2 + k + n$ een priemgetal is voor alle gehele getallen k met $0 \leqq k \leqq \sqrt{n/3}$,
dan is $k^2 + k + n$ een priemgetal voor alle gehele getallen k met $0 \leqq k \leqq n - 2$.

Mededelingen

Nederlandse wiskunde Olympiade 1988

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1988 zal plaatsvinden op vrijdag 11 maart 1988.
Eind februari ontvangen alle scholen voor VWO en HAVO het opgavenblad, een correctiesleutel en een resultatenformulier, gericht aan de wedstrijdleider van de Wiskunde Olympiade.
Ongeveer honderd deelnemers met de beste resultaten in deze eerste ronde worden uitgenodigd om deel te nemen aan de tweede ronde, die op vrijdag 9 september 1988 in Eindhoven gehouden zal worden.
Uit de tweede ronde zullen tien prijswinnaars komen, terwijl voor enkele deelnemers de mogelijkheid bestaat om mee te doen aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1989.

H. N. Schuring, secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde p/a CITO,
Postbus 1034, 6801 MG Arnhem

Wiskunde en Onderwijs

Leden van de NVvW die een abonnement hebben op Wiskunde en Onderwijs betalen hiervoor, evenals verleden jaar, 550 BF (incl. porto). Omgerekend in onze valuta is dat ƒ30,75. Vriendelijk verzoek dit bedrag zo spoedig mogelijk te willen voldoen door storting op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth.
Nieuwe abonnees zijn welkom. Ze kunnen zich opgeven door storting van het verschuldigde bedrag met vermelding 'nieuw abonnee'. Ze zijn dan automatisch tevens lid van de VVWL, ontvangen het mededelingenblad en hebben toegang tot alle bijeenkomsten van de VVWL. Het verenigingsjaar loopt van 1 januari tot 31 december.

P. G. J. Vredenduin

Sport en wiskunde

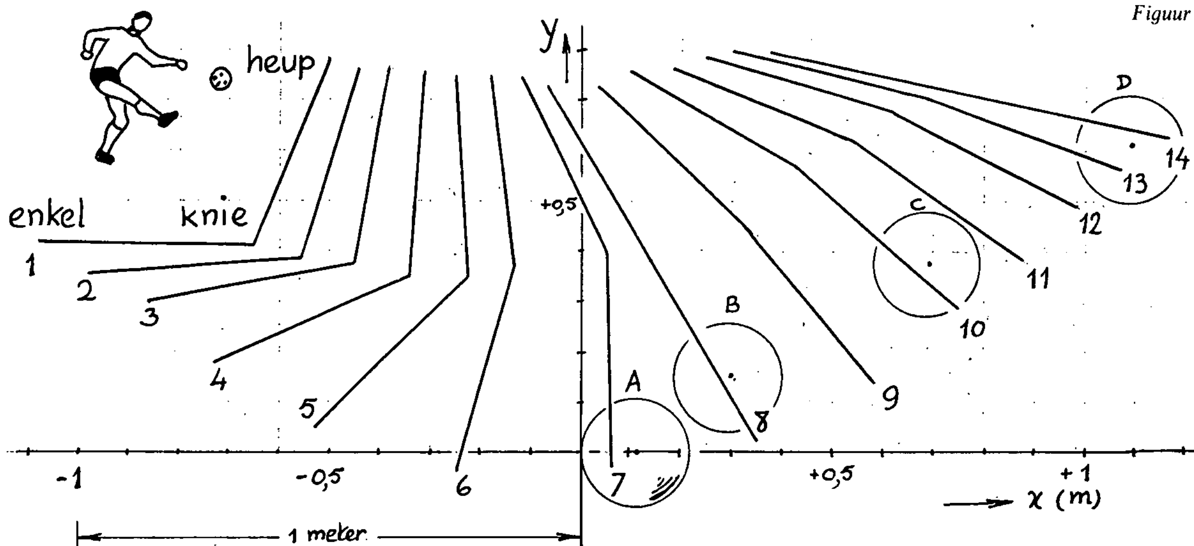
2 Een schop met een wiskundige kick

Henk Mulder



In een vorig nummer hebben we analyses gemaakt van grafieken van 100-meter lopers. We beperkten ons tot ideale gevallen van parabolen en rechten. Nu willen we een onderzoek doen aan een echte kromme ... op het voetbalveld.
In figuur 1 staat een tekenfilm van 14 opnamen, gemaakt van een krachtige schop tegen een bal. De gebruikte gegevens zijn afkomstig van de afdeling biomechanica van de Polytechnic in Liverpool. De beenbeweging werd gefilmd met een hoge snelheid van 64 beelden per seconde. De tijd tussen twee beelden is dan 0,016 s en de totale tijd voor het schot van aanzwaai tot uitzwaai 13 × 0,016 of 0,2 s. Maar in die korte tijd gebeurt er heel veel.
In het zwaaiend been zijn drie redelijk exacte punten aan te geven, namelijk het heup-, het knie- en het enkelgewricht. Deze punten zijn door lijnstukken verbonden die dus het boven- en onderbeen verbeelden. In figuur 1 is op te meten dat boven- en onderbeen hier 0,39 en 0,42 m lang zijn. We zullen speciaal een studie verrichten van de beweging van het enkelpunt.
Misschien krijgt u net als wij ook wel een kick van deze *numerieke differentiatie*!

Plaats en snelheid
In figuur 2 zijn de coördinaten opgegeven voor het enkelpunt, uitgedrukt in meter. We gaan daarbij uit van een assenstelsel met als oorsprong het punt van eerste balcontact. Dat moment ligt tussen positie 6 en 7.
We willen de snelheid bepalen van de enkel in de opeenvolgende standen. Nu is snelheid: afstand gedeeld door tijd. Voor de snelheid op een zeker moment moeten we deze tijdspanne Δt wel erg klein nemen, theoretisch tot nul laten naderen. Als laagste waarde voor Δt kunnen we hier 0,016 s gebruiken. Als we dus de snelheid willen weten op een zeker ogenblik moeten we hier genoegen nemen met de gemiddelde snelheid over een klein naburig traject.
Stel we willen de snelheid in punt 9 bepalen (figuur 3). Dat zou op verschillende manieren kunnen gebeuren. Bijvoorbeeld met de lengte van het stuk 8-9 of met die van het stuk 9-10. We noemen dat extrapolatie.



Figuur 1

positie	x(m)	y(m)
1	−1,09	+0,42
2	−0,98	+0,37
3	−0,87	+0,30
4	−0,73	+0,18
5	−0,52	+0,05
6	−0,24	−0,04
7	+0,06	−0,04
8	+0,35	+0,02
9	+0,59	+0,14
10	+0,75	+0,29
11	+0,88	+0,38
12	+0,98	+0,49
13	+1,09	+0,57
14	+1,17	+0,62

Figuur 2 Coördinaten van de enkel

In het eerste geval berust de uitkomst op gegevens uit het verleden, in het tweede op die van de toekomst. Uitgaande van de in figuur 2 gegeven coördinaten kunnen we de lengten van beide lijnstukken bepalen. We vinden 0,27 m voor het stuk 8-9 en 0,22 m voor het stuk 9-10.

Werkend met het eerste stuk vinden we:

$$v_9 = \frac{0{,}27}{0{,}016} = 17 \text{ m/s}.$$

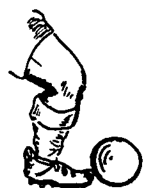
En uitgaande van het tweede stuk:

$$v_9 = \frac{0{,}22}{0{,}016} = 14 \text{ m/s}.$$

Als we precies de snelheid in positie 9 willen weten, is de eerste uitkomst beslist te hoog en de tweede te laag. We kunnen ook interpoleren (dat is altijd secuurder) en v_9 bepalen uit de lengte van het stuk 8-10. Dan komt eruit:

$$v_9 = \frac{0{,}48}{2 \cdot \Delta t} = \frac{0{,}48}{0{,}032} = 15 \text{ m/s}$$

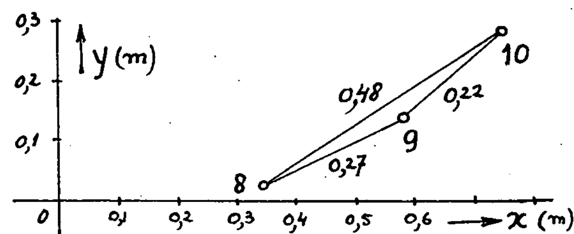
en daar houden we het maar op. De richting van het laatste lijnstuk geeft ook beter de richting van de snelheidsvector in 9 aan, dan die van de beide eerder genoemde lijnstukken.



Zo hebben we in alle punten de snelheid benaderd. Alleen in de uiterste punten 1 en 14 kunnen we alleen door extrapolatie eruit komen, omdat in 1 het verleden onbekend is en in 14 de toekomst.
In figuur 4 is de serie uitkomsten genoteerd en in grafiek gebracht. De topsnelheid ligt op 18,5 m/s of 67 km/h!
De schoppende voet bereikt die snelheid juist voordat het balcontact plaats heeft.
Tevens zijn in figuur 1 uitgaande van de filmbeelden, vier balposities A, B, C en D ingetekend, waarbij A de rustpositie verbeeldt en B, C en D volgende momentopnamen van de filmband.
Op de boven beschreven manier kunnen ook hier uit afstanden en tijden de balsnelheden kort na het afgaan van het schot, berekend worden. De uitkomst ligt rond 28 m/s of 100 km/h!
Ergens tussen stand B en C verliest de voet het contact met de bal zodat het versnellingsgedeelte in een uiterst kleine tijd plaats heeft (hooguit 0,02 s). Over die versnelling willen we nog wat zeggen.

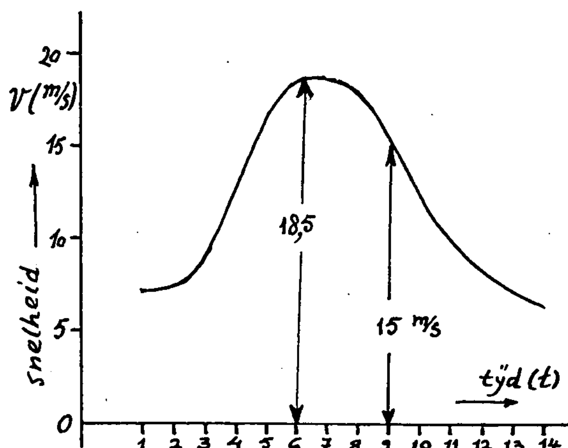
Versnelling

In figuur 4 lezen we af hoe in de aanloopfase de snelheid van het schietende been toeneemt en na het schot weer afneemt. We spreken van positieve en negatieve versnelling (a = acceleration). Versnelling is de toename van de snelheid per tijdseenheid of $a = \frac{dv}{dt}$.
Hoe kunnen we die versnellingen numeriek bepalen?



Figuur 3 Bepaling van de snelheid in positie 9 bij Δt = 0,016 s

no	v_n (m/s)
1	7,2
2	7,6
3	9,9
4	13,5
5	16,9
6	18,5
7	18,4
8	17,4
9	15,2
10	11,7
11	9,4
12	8,7
13	7,2
14	6,1



Figuur 4 Snelheidsgrafiek

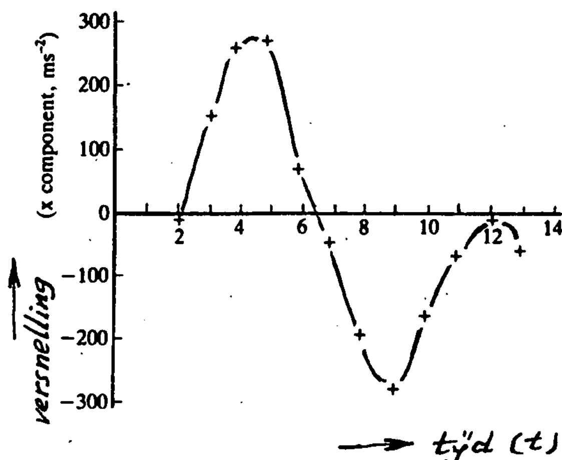
Beperken we ons eerst tot de versnelling in de x-richting.
In het algemeen geldt:

$$v_{n-1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}$$

en $v_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$

waaruit volgt:

$$a_{n-1} = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{(\Delta t)^2}$$



Figuur 5 Bepaling van de horizontale component van de versnelling

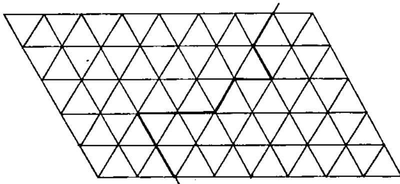
Op deze manier zijn de uitkomsten van figuur 5 bepaald. De werkelijke of totale versnelling is nog hoger, omdat daar nog vectorieel de verticale component aan moet worden toegevoegd. Reeds nu valt op hoe hoog die versnellingsuitkomsten zijn. Wel tot 25 keer de normale valversnelling!
Deze versnellingswaarden zijn daarom zo belangrijk, omdat daaruit de krachten bepaald kunnen worden die de voet op de bal uitoefent tijdens het schot.
Bij het zien van die getallen durf je haast geen bal meer te koppen.

Opvallend is het hoe uit een aantal gegeven coördinaten, op te meten met behulp van een filmstrook, uitkomsten volgen voor snelheden, versnellingen en krachten. Daartoe moet *numeriek gedifferentieerd* worden, hetgeen niet meer betekent dan dat we steeds verschillen berekenen. Eigenlijk zouden we limieten moeten bepalen, waarbij Δt naar nul nadert. Maar dat lukt hier niet. In ons geval moesten we tevreden zijn met $\Delta t = 0{,}016$ s.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

580. Een parallellogramvormige lap is bedrukt met gelijkzijdige driehoeken. De zijde van een driehoek heeft lengte 1, de zijden van het parallellogram a en b. De lap wordt in twee stukken verdeeld door een snede langs de zijden van de driehoeken. Men mag daarbij telkens naar rechts boven, links boven of horizontaal naar rechts knippen. Hieronder is een dergelijke snede getekend. Op hoeveel manieren kan de lap verdeeld worden?

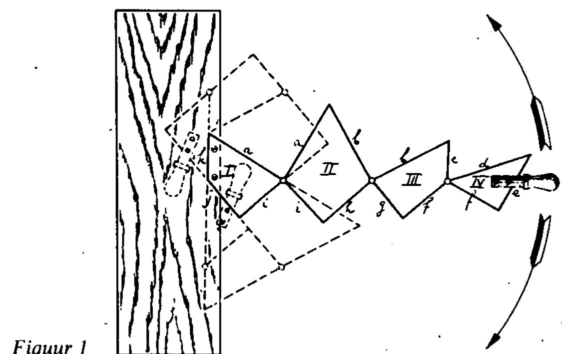


581. Roger Holvoet schreef me onlangs dat hij zijn studenten de vraag stelde welke de 48 isometrieën zijn, namelijk de 24 spiegelingen en de 24 draaiingen, die een kubus in zichzelf doen overgaan. Ik wilde voor zijn studenten niet onderdoen en ben naarstig aan het zoeken geweest, uitgaande van de overtuiging dat een hooggeleerde zijn studenten geen strikvragen stelt. Ik ben nieuwsgierig hoe de lezers op dit probleem reageren.
Gaarne uw reactie binnen een maand aan bovenstaand adres.

Oplossingen

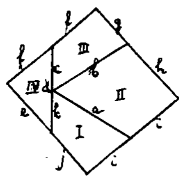
573.a Kies een willekeurig positief rationaal getal, bijv. $\frac{19}{87}$. Het is kleiner dan 1. Het omgekeerde, $\frac{87}{19}$, is dan groter dan 1. Trek hier telkens 1 af, totdat men een uitkomst krijgt die weer kleiner dan 1 is, i.c. $\frac{11}{19}$. Het omgekeerde hiervan is $\frac{19}{11}$. Zo voortgaande krijgt men een serie noemers 87, 19, 11, ... die monotoon afneemt. Uiteindelijk wordt de noemer dus 1. Het getal is dan geheel. Door er steeds 1 van af te trekken vindt men ten slotte 1. Waaruit blijkt dat het getal $\frac{19}{87}$ tot de rij behoort. Deze bestaat dus uit alle positieve rationale getallen.
b, c, d Kies een rij r_p met $(r_p)_1 = t_p$. Daarvan is:
$(r_p)_2 = (r_p)_1 + 1 = t_{2p}, (r_p)_3 = t_{2_{p+1}}, (r_p)_4 = t_{4p}, \ldots$
Met $(r_p)_q$ correspondeert een element van t, waarvan we het rangnummer voorstellen door $f(q)$.
Onderstel q is oneven. Dan is $f(q-1) = f(q) - 1$.
Is q even, dan is $f(q-1) = \frac{1}{2}q$.
Schrijf nu de rangnummers in het tweetallig stelsel. Neem bij wijze van voorbeeld aan dat $p = 101$ en dus $2p = 1010$.
Onderstel $f(q) = 101001101$.
Dan vinden we achtereenvolgens:
$f(q-1) = 101001100$
$f(q-2) = 10100110$
$f(q-3) = 1010011$
$f(q-4) = 1010010$
$f(q-5) = 101001$
$f(q-6) = 10100$
$f(q-7) = 1010$
en dus: $q - 7 = 2p$ en $q - 8 = p$.
We hebben het geluk gehad 1010 te bereiken. Hadden we dit getal niet bereikt, dan waren we begonnen met een getal dat niet in de rij r_p voorkomt. r_p bestaat dus uit alle getallen uit de rij t waarvan het rangnummer begint met 101.
Nu in het bijzonder de rij die begint met $t_2 = 2$. De index 2 wordt tweetallig geschreven 10. De rij r_2 bestaat dus uit alle getallen uit t waarvan het rangnummer begint met 10.
De rij r_3 begint met $t_3 = \frac{1}{2}$. Deze bestaat uit alle getallen uit t waarvan het rangnummer begint met 11.
De doorsnede van de domeinen van r_2 en r_3 is dus leeg; hun vereniging bestaat uit alle termen uit t waarvan het rangnummer begint met 10 of met 11. D.w.z. alle termen op t_1 na.
Kies nu bijv. $p = 11010$. Dan bestaat r_p uit alle termen uit t met rangnummer dat begint met 11010.
Als $p = 11011$, dan bestaat r_p uit alle termen uit t waarvan het rangnummer begint met 11011.
De doorsnede van deze twee verzamelingen is leeg. Hun vereniging bestaat uit alle termen uit t waarvan het rangnummer begint met 1101, echter met uitsluiting van 1101 zelf.
Met dank voor hun oplossingen aan G. Holleman (Monnickendam) en W. M. Banis (Laren NH).

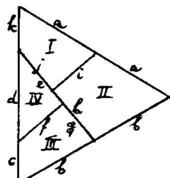
574. Drie vierhoeken en een driehoek zijn scharnierend verbonden (zie figuur 1). Door ze volgens de pijl naar boven te bewegen, ontstaat een vierkant, naar beneden een gelijkzijdige driehoek.
Gevraagd de verhouding van de vijftien zijden.



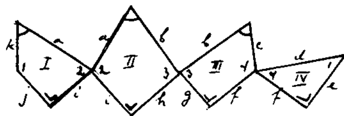
Figuur 1

In figuur 2 is getekend hoe I, II, III en IV samengevoegd worden tot een vierkant; in figuur 3 hoe ze samengevoegd worden tot een gelijkzijdige driehoek.

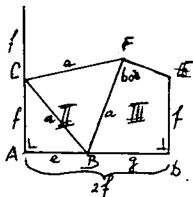

Figuur 2


Figuur 3

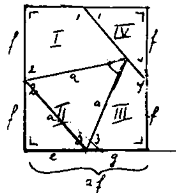
In figuur 4 zijn I-IV nogmaals getekend. De hoeken waarin een boogje staat, zijn 60°. De hoeken waarin dezelfde cijfers taan, zijn elkaars supplement.


Figuur 4

In figuur 3 en figuur 2 zien we:
$2a = 2b = c + d + k$
$e + g = h + j$
$2f = 2i = e + j = g + h$
$d = c + k$
In figuur 4 trekken we in I, II en III de horizontale diagonaal. Cosinusregel en Pythagoras geven dan:
$a^2 + k^2 - ak = i^2 + j^2$
$a^2 + b^2 - ab = h^2 + i^2$
$b^2 + c^2 - bc = f^2 + g^2$
$d^2 + e^2 + f^2$
Uit het eerste viertal vinden we:
$b = a,\ d = a,\ i = f,\ j = g,\ h = e,\ 2f = e + g,\ k = a - c$
Hieruit zien we dat het onderste viertal gelijkwaardig is met
$a^2 + k^2 - ak = f^2 + g^2$
$a^2 + e^2 + f^2$
$a^2 + c^2 - ac = f^2 + g^2$
Wegens $k = a - c$ zijn van dit drietal de eerste en de derde gelijkwaardig en kunnen we de eerste dus weglaten.
Dus: als we e en f kiezen, zijn de andere eenduidig bepaald. Kies daarom e en f. Ga construeren en kijk wanneer het lukt. In figuur 5 is dat gedaan.


Figuur 5

Begin met de rechthoekige driehoek ABC. Daarna de gelijkzijdige driehoek BCF. Samen vormen die II. Maak $AD = 2f$ en loodrecht daarop $DE = f$. Trek EF. Nu gaat het mis. Er moet gelden $\angle BFE = 60°$, dus $EF \parallel BC$ en daarom
$d(E, BC) = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.
Dit is gelijkwaardig met
$\frac{1}{2}a\sqrt{3} : 2f = f : a$
dus met
$f = \frac{1}{2}a\sqrt[4]{3}$
Kies e en f zo dat hieraan voldaan is. Dan lukt het. In figuur 6 is de constructie voltooid.


Figuur 6

Men verifieert gemakkelijk dat nu aan alle voorwaarden voldaan is en dat bovendien de hoeken met dezelfde cijfers inderdaad elkaars supplement zijn.
De vorm van de figuren is dus door de gestelde eisen eenduidig bepaald.

575. N heeft twee soorten tanks, A en B; Z eveneens twee soorten, C en D. De winstkansen van gevechten tussen tanks van bepaalde soorten staan in onderstaand diagram.

N kiest de aantallen tanks van soort A en B zo dat ze zich verhouden als $p:(1-p)$. Hij deelt aan Z de waarde van p mee. Z besluit daarop de hoeveelheden van C en D zo te kiezen dat ze zich verhouden als $q:(1-q)$ en deelt aan N de waarde van q mee. Onder welke voorwaarde loopt dit proces niet oneindig door?
De kans op winst voor N is
$0{,}6\,pq + 0{,}4\,p(1-q) + 0{,}2\,q(1-p) + 0{,}7(1-q)$
dus aan
$0{,}7\,pq - 0{,}3\,p - 0{,}5\,q + 0{,}7$
Winstkans voor Z is dan
$-0{,}7\,pq + 0{,}3\,p + 0{,}5\,q + 0{,}3$
Gevolg:
als $0{,}7\,q - 0{,}3 > 0$, dan zal N kiezen $p = 1$
als $0{,}7\,q - 0{,}3 < 0$, dan zal N kiezen $p = 0$
als $0{,}7\,q - 0{,}3 = 0$, dus als $q = \frac{3}{7}$, dan is het irrelevant voor N wat hij kiest; zijn winstkans is altijd $-0{,}5\frac{3}{7} + 0{,}7 = \frac{17}{35}$.
En evenzo:
als $-0{,}7\,p + 0{,}5 > 0$, dan zal Z kiezen $q = 1$
als $-0{,}7\,p + 0{,}5 < 0$, dan zal Z kiezen $q = 0$
als $-0{,}7\,p + 0{,}5 = 0$, dus als $p = \frac{5}{7}$, dan is het irrelevant voor Z wat hij kiest; zijn winstkans is altijd $0{,}3\frac{5}{7} + 0{,}3 = \frac{18}{35}$.
Als $p = 0$, $p = 1$, $q = 0$ of $q = 1$, dan ontstaat een eindeloos proces. De voorwaarde voor een eindig proces is dus $p = \frac{5}{7}$ en $q = \frac{3}{7}$.

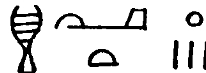
'Van kleitablet tot overhead'

K. van Breugel

Wie de ontstaansgeschiedenis van de wiskunde onderzoekt, komt voor tal van verrassingen te staan. En die verrassingen kunnen heel waardevol zijn, niet in het minst voor hen die wiskunde onderwijzen. Tijdens onze afstudeerperiode aan de SOL in Utrecht hebben wij (Richard Reusink, Ron van der Pas, Ria van de Kleut en ondergetekende) ons beziggehouden met de vraagstelling: 'Welke bijdrage kan de geschiedenis van de wiskunde leveren aan het ontwerpen van wiskunde-onderwijs?'
Ook anderen hebben zich met de vraag beziggehouden (in Nederland is dat o.a. H. Freudenthal[1]) hoe een kleitablet (symbool voor wetenschap uit de oudheid) en een overhead-projektor (symbool voor modern onderwijs) op een zinvolle wijze met elkaar in verband zijn te brengen.
Het doel van dit artikel is om enkele van onze ideeën uiteen te zetten aan de hand van concrete voorbeelden uit de schoolwiskunde. Op minstens drie punten kan de geschiedenis van de wiskunde waardevol zijn bij het overdragen van wiskunde aan anderen.

I Ter verduidelijking van mijn eerste punt wil ik het schoolwiskunde-onderwerp 'vergelijkingen' nemen. Vergelijken deden de Egyptenaren al vóór 1500 v. Chr. En juist omdat men in die tijd op dit punt nog niet zo abstract kon denken, kunnen we veel leren van wat de Egyptenaren op hun papyrusrollen schreven. Leerlingen zitten immers met hetzelfde probleem, en bij het onderwerp 'vergelijkingen' worstelt een aanzienlijk deel van hen met de vraag: 'Wat stelt nou die x in een vergelijking voor?'[2]

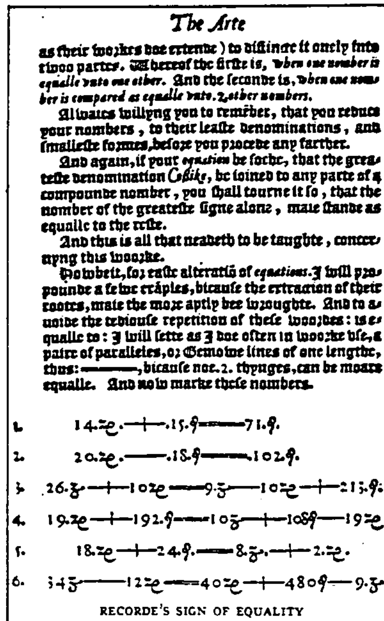
De Egyptenaren hadden een verrassende kijk op de variabele in een vergelijking. Ze gebruikten er vaak het volgende teken voor:



Dit hiërogliefenteken kunnen we vertalen met 'hoop', in de zin van: stapel, hoeveelheid. Het cirkeltje rechtsboven is het symbool voor een graankorrel. Zoals een graankorrel, die in de aarde valt, een (vooraf onbekend) aantal nieuwe graankorrels voortbrengt, zo is de variabele in een vergelijking de vertegenwoordiger van een 'hoop', een vooraf onbekende hoeveelheid. Voor leerlingen kan dit verhelderend zijn; vooral ook omdat er in de wiskunde al zoveel soorten letters in omloop zijn, zal een concreet symbool hen veel meer aanspreken.
Uit dit voorbeeld kunnen we de volgende conclusie trekken: als we een wiskundig begrip moeten overdragen aan anderen, kan het nuttig zijn te weten hoe mensen dit begrip zagen toen het ontstond. Soms kunnen we hier achter komen door te letten op de naam die men aan het begrip gaf, of op de naam die wij eraan geven. Het is leuk om in dit verband het begrip 'koorde' te noemen. Voor mijzelf is dit begrip altijd nogal duister geweest. Het deed mij denken aan 'koord', dus aan een stukje touw, dus aan een kromme. Ik dacht bij 'koorde' dan ook altijd aan een deel van de cirkelboog. Sinds ik weet dat 'koorde' is afgeleid van het Latijnse 'chorda' (= boogpees) zal ik de werkelijke betekenis niet snel meer vergeten!

II Ik wil nu ingaan op het tweede voordeel, dat bestudering van de historie van de wiskunde ons bieden kan. Het gaat om het volgende: leerlingen zijn over het algemeen nogal nieuwsgierig aangelegd. Ze willen vaak het waarom van een zaak weten. Echter, we moeten hen maar al te vaak teleurstellen met een antwoord als: "Dat hebben we nu eenmaal afgesproken in de wiskunde". Iemand die een beetje thuis is in de geschiedenis van de wiskunde, kan sommige van deze vragen nu wél beantwoorden.
Zo is bijvoorbeeld een cirkel niet zomaar in 360 graden verdeeld. We hebben deze verdeling te danken aan de Babyloniërs, die behalve de wiskunde ook de astronomie bestudeerden. Ze verdeelden het

jaar in 360 dagen, dus in de cirkel die de zon in hun theorieën beschreef, schoof de zon iedere dag 1 graad op. (Tussen haakjes: dit model is uitstekend geschikt voor begripsvormig rondom hoeken.)
Er zijn talloze andere voorbeelden te noemen, vooral als het gaat om notaties. Waarom het wortelteken er zo uitziet? Het is een 'vergroeiing' van de letter r, de eerste letter van het Latijnse 'radix' voor ons woord 'wortel'. Recorde, een Engelsman uit de 16e eeuw, vond dat geen twee figuren zó op elkaar lijken kunnen als twee horizontale liggende streepjes, en zo ontstond ons =-teken als standaardteken in een vergelijking.
Conclusie: allerlei heel gewone zaken uit de schoolwiskunde krijgen een diepere inhoud als we letten op hun historische oorsprong.



The Arte

as their woorkes doe extende) to diſtincte it onely into twoo partes. Whereof the firſte is, *when one nomber is equalle unto one other*. And the ſeconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.*

Alwaies willyng you to remẽber, that you reduce your nombers, to their leaſte denominations, and ſmalleſte formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be ſoche, that the greateſte denomination *Coſike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you ſhall tourne it ſo, that the nomber of the greateſte ſigne alone, maie ſtande as equalle to the reſte.

And thus is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for eaſie alteratiõ of *equations*. I will propounde a fewe exãples, bicauſe the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tedioule repetition of theſe woordes: is equalle to: I will ſette as I doe often in woorke uſe, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═══════, bicauſe noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke theſe nombers.

1. 14.ꝛe. —+— .15.ϑ ══════ 71.ϑ.
2. 20.ꝛe. ——— .18.ϑ ══════ .102.ϑ.
3. 26.ʒ —+— 10ꝛe ══════ 9.ʒ —— 10ꝛe —+— 213.ϑ.
4. 19.ꝛe —+— 192.ϑ ══════ 10ʒ —+— 108ϑ —— 19ꝛe
5. 18.ꝛe —+— 24.ϑ. ══════ 8.ʒ. —+— 2.ꝛe.
6. 34ʒ —— 12ꝛe ══════ 40ꝛe —+— 480ϑ —— 9.ʒ

RECORDE'S SIGN OF EQUALITY

III Last but not least wil ik benadrukken dat de geschiedenis van de wiskunde tal van leuke, spannende en interessante verhalen bevat om leerlingen te motiveren voor wiskundelessen. Neem bijvoorbeeld het tragische verhaal van de jonge Galois, die in een duel stierf, nadat hij de avond ervoor nog snel even zijn theorie had afgemaakt. Of het verhaal van die doortrapte Cardano, die zijn belofte brak en een formule publiceerde die iemand anders had gevonden...



Geronimo Cardano (1501-1576)

Hoewel de wiskunde achter sommige van deze verhalen voor leerlingen niet geschikt is, kunnen de verhalen toch zorgen voor een leuk, afwisselend moment in de les.

De oorzaak van het feit dat zo weinig mensen gebruik maken van historie in hun lessen is veelal een gebrek aan kennis. Door het schrijven van onze scriptie, die dezelfde titel draagt als dit artikel, hebben we geprobeerd deze leemte gedeeltelijk op te vullen.
We hebben van een aantal schoolwiskunde-onderwerpen de geschiedenis beschreven. Daarbij hebben we steeds onze visie gegeven op het eventuele gebruik van die geschiedenis in de les. We hebben onze visie ook concreet laten zien in werkbladen. Zo bevat de scriptie een werkblad over vergelijkingen, waarbij voor de variabele aanvankelijk de graankorrel van de Egyptenaren wordt gebruikt.
We hebben ook een aantal deskundigen geïnterviewd, die in onze scriptie hun visie geven op het gebruik van wiskunde-historie in de les. Uniek is het verslag van het gesprek met de 83-jarige Prof. B. L. van der Waerden uit Zürich. Deze autoriteit op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde vertelde aan één van ons zijn laatste verrassende vondsten over de geschiedenis van de wiskunde.
U kunt onze scriptie, die 370 pagina's telt, bestellen door *f* 44,– over te maken op gironr. 5227009 t.n.v. mw. M.S. van de Kleut o.v.v. de titel. Een exemplaar met verkleinde pagina's kost *f* 24,–.

Noten

1 Zie bijvoorbeeld Mathematics as an Educational Tasle, Reidel 1973.
2 Zie B. Lagerwerf: 'Wiskundeonderwijs nu', p. 13 e.v.

Boekbesprekingen

B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte, *Reidel Publishing Company*, *f* 152,–; 351 pag. Perspectives on Mathematics Education.

Dit boek is een publikatie van de zgn. BACOMET-groep. BACOMET staat voor Basic Components of Mathematics Education for Teachers. Deze internationale groep is in 1979 opgericht en bestaat uit 15 leden, waarvan uit Nederland J. van Dormolen en F. Goffree. Het doel van de projectgroep is voornamelijk: het opsporen en bestuderen van componenten van wiskunde-onderwijs die een hoge prioriteit in de lerarenopleiding hebben. Het gaat hier dus om een boek dat voor opleiders bestemd is.
Hoofdthema van deze publikatie is: welk verband moet er zijn tussen de praktische kennis van leraren èn de bijbehorende theoretische achtergronden?
Zoals bekend, kan tussen beide soorten kennis een aanzienlijk spanningsveld bestaan. Dit spanningsveld wordt nader bestudeerd in een aantal van de acht bijdragen waaruit het boek bestaat:

1 Social norms and external evaluation
A.G. Howson, S. Mellin-Olsen
2 Mathematics as a school subject
W. Dörfler, R. R. McLone
3 Teacher's cognitive activities
R. Bromme, J. Brophy
4 Textual analysis
J. van Dormolen
5 What is a text?
M. Otte
6 Observing students at work
G. Brousseau, R. B. Davis, T. Werner
7 Task and activity
B. Christiansen, G. Walther
8 Classroom organisation and dynamics
A. J. Bishop, F. Goffree

De meeste hoofdstukken beperken zich tot het vrij algemeen en beschouwend ingaan op een groot aantal punten die om de hoek komen kijken. Enerzijds verschaft dat een systematiek die zeker verrijkend is. Anderzijds blijft, vanwege de enigzins sociologisch getinte beschouwingen, een transfer naar de opleidingssituatie nogal moeilijk.
Alleen hoofdstuk 4 vormt hierop een uitzondering. In deze bijdrage van de hand van J. van Dormolen wordt een goed hanteerbare lijst van aandachtspunten bij het beoordelen van wiskundeteksten gegeven. Een der conclusies in het boek is dat in de opleiding niet alleen praktische, maar ook theoretische kennis moet worden aangebracht. Weliswaar worden wegen aangegeven die het spanningsveld tussen beide soorten kennis kunnen verminderen, maar erg operationeel zijn deze wegen nog niet.
Slotconclusie:
Een niet gemakkelijk leesbaar boek van 371 blz. van een erudiet gezelschap. Daar valt niets op af te dingen. Echter wel een boek waarvan de directe bruikbaarheid voor opleiders naar mijn idee beperkt zal blijven.

J. de Ruiter

A. F. Karr, *Point processes and their statistical inference*, (Probability: Pure and Applied, A Series of Textbooks and Reference Books, Volume 2) 1986, 504 p., $ 107,50,
ISBN: 0-8247-7513-9.

Standaard voorbeelden van puntprocessen – zoals tijdstippen van gespreksaanvragen in een telefooncentrale of aankomsttijdstippen van klanten aan een loket – worden besproken in vele inleidingen op het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening. Er bestaat een vrij uitgebreide literatuur over puntprocessen. De laatste jaren is de literatuur aanzienlijk uitgebreid met artikelen waarin statistische problemen – zoals toetsing- en schattingsproblemen voor (onbekende) parameters – worden opgelost. Dikwijls wordt daarbij gebruik gemaakt van de theorie van de martingalen en van de stochastische integralen. In dit boek worden resultaten uit de theorieën veelvuldig gebruikt.
Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat dit geen elementair boek is. Het is geschreven voor onderzoekers en aanstaande onderzoekers op het gebied van de kansrekening en mathematische statistiek. Het is geschikt voor een caput college. De benodigde voorkennis is een goed college kansrekening (met inbegrip van (discrete tijd) martingalen) en mathematische statistiek. Het boek bevat een uitgebreide (± 700) lijst van referenties.

J. L. Mijnheer

M. R. Cullen, *Lineair Models in Biology*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1985, 209 pag., *f* 10,50, ISBN 0-85312-905-3.

Dit boek, een deel uit de serie 'Mathematics and its Applications', heeft als ondertitel 'Linear systems analysis with biological applications'. Deze omschrijving vat de inhoud van het boek goed samen.
De auteur maakt bij een groot aantal biologische onderwerpen een wiskundig (meestal lineair) model. Een greep uit de onderwerpen: populaties van verschillende diersoorten, prooi-roofdiersituaties, ecosystemen, het zo efficiënt mogelijk kappen van een bos, de concentratie van strontium in een tropisch regenwoud, de afbraak van medicijnen in het lichaam.

De wiskunde, die ter sprake komt, ligt op het gebied van het werken met overgangs- en Lesliematrices, het oplossen van differentie- en differentiaalvergelijkingen (ook numeriek) en het lineair programmeren.
Deze wiskunde wordt in een aantal aparte hoofdstukken op heldere wijze onderbouwd.
De 200 opgenomen opgaven, waarvan een deel het gebruik van een computer vereist, geven een goede ondersteuning en uitbreiding van de behandelde stof. Van de helft van de opgaven zijn de antwoorden opgenomen.
Degene, die wel eens wat meer wil weten over de in het vak wiskunde-A behandelde zaken, zal met dit boek zeker uit de voeten kunnen.

Z. E. Warmelink

Dr. F. Verhulst, *Niet lineaire differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 269 blz., *f*29,50.

'Het gebied van de niet lineaire differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen worden gekenmerkt door vele moderne ontwikkelingen, die mogelijk zijn gemaakt door computer- en storingsmethoden en door het gebruik van nieuwe methoden uit de abstracte analyse en de differentiaaltopologie. Uitgaande van elementaire kennis van de differentiaalvergelijkingen leidt dit boek in op die moderne ontwikkelingen. Hierbij komen zowel de kwalitatieve als de kwantitatieve aspecten tot hun recht.'
Om een indruk van het werk te geven volgt hier een overzicht van de inhoud:
Inleiding; autonome vergelijkingen; kritieke punten; periodieke oplossingen; inleiding in de stabiliteitsanalyse door lineairisering; stabiliteitsanalyse met de directe methode; inleiding in de storingsrekening; de Poincaré-Lindstedt methode; de middelingsmethode; relaxatietrillingen; de theorie van vertakkingen; chaos; Hamilton stelsels.
In drie aanhangsels zijn opgenomen:
het lemma van Morse; lineaire periodieke vergelijkingen met een kleine parameter; trigonometrische formules en gemiddelden.
Het boek wordt besloten met een literatuurlijst en een lijst van trefwoorden.
Bestemd voor studenten wiskunde, natuurwetenschappen en technische wetenschappen vereist het bestuderen van dit werk een zekere voorkennis van de analyse en de differentiaalvergelijkingen (door de schrijver geschat op ongeveer derde jaar universiteit/Technische Hogeschool).
Een uitnemend leerboek dat de stof op een heldere wijze presenteert. Het werk ziet er bovendien zeer verzorgd uit.

W. Kleijne

Vademecum

Euclides

drs. A. B. Oosten, voorzitter/eindredacteur, Elzenlaan 34, 9321 GN Peize, 05908-3 22 03

drs. M. C. van Hoorn, hoofdredacteur, postbus 9025, 9703 LA Groningen, 050-41 09 81

P. E. de Roest, secretaris, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, 05970-2 20 27

dr. P. G. J. Vredenduin, penningmeester, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth, 085-33 38 07

drs. H. Bakker, Jan Steenlaan 11, 8932 EA Leeuwarden, 058-13 59 76

G. Bulthuis, Ganzenwei 302, 2361 XE Warmond, 01711-1 19 69

W. M. J. M. van Gaans, Basaltdijk 8, 4706 DL Roosendaal, 01650-4 31 65

drs. C. G. J. Nagtegaal, Park Arenberg 37, 3731 EN De Bilt, 030-76 26 77

ir. V. Schmidt, Galkemaheerd 67, 9736 BG Groningen, 050-42 03 27

mw. H. S. Susijn-van Zaale, Curaçaoweg 5, 6524 ST Nijmegen, 080-22 71 44

A. van der Wal, Ordermolenweg 23, 7312 SC Apeldoorn, 055-55 13 28

gironummer 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth

Kalender

11 maart 1987: Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
23 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres

Inhoud

Adressen van auteurs

K. van Breugel, Krachtighuizerweg 37, 3881 PC Putten

Drs. J. G. M. Donkers, p/a T.U. Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

D. Kok, Voltaplein 45[I], 1098 NP Amsterdam

Prof. dr. J. H. van Lint, p/a T.U. Eindhoven, zie boven

Ir. H. M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

M. Pranger, Park Arenberg 37, 3731 EN De Bilt